

Algebraische Kombinatorik

Vorlesung im Wintersemester 2019/20

Benjamin Sambale
Leibniz Universität Hannover

Version: 4. Juli 2023

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Wege in Graphen	2
2 Radon-Transformation	5
3 Irrfahrten	9
4 Die Sperner-Eigenschaft	14
5 Operationen auf der booleschen Algebra	19
6 Young-Diagramme und q -Binomialkoeffizienten	26
7 Pólya-Theorie	34
8 Young-Tableaux	44
9 Der Matrix-Baum-Satz	52
10 Eulersche Graphen	59
11 Aufgaben	66

Vorwort

Dieses Skript entstand aus einer 4 + 2-Vorlesung im Wintersemester 2019/20 (14 Wochen) an der Leibniz Universität Hannover und richtet sich vorrangig an Studierende der Studiengänge Bachelor und Master Mathematik. Es werden Kenntnisse der Linearen Algebra 1 & 2, Analysis 1 und Diskreten Mathematik vorausgesetzt. Die Inhalte stammen aus folgendem Buch:

- R. P. Stanley, *Algebraic Combinatorics*, 2nd edition, Springer, Cham, 2018, <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-77173-1> (E-Book im Uninetz verfügbar).

Im Unterschied zum Buch wurden einige Beweise hinzugefügt (Sätze von Perron-Frobenius, Cauchy-Binet und die Hakenformel). Andererseits fehlen einige erklärende Diagramme, die in der Vorlesung an der Tafel standen. Der Satz von Perron-Frobenius wurde nachträglich erweitert, um eine Übungsaufgabe zu lösen.

Ich bedanke mich bei Max Gajeufsky und Till Müller für einige Fehlerhinweise.

1 Wege in Graphen

Definition 1.1.

- Leere Menge: \emptyset .
- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$.
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$.
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
- Reelle Zahlen: \mathbb{R} (Analysis).
- Komplexe Zahlen: \mathbb{C} (Analysis).
- Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ und $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$.
- Für eine Menge A sei $|A|$ die Mächtigkeit von A . Man nennt A *endlich*, falls $|A| < \infty$ und anderenfalls *unendlich*. Wir unterscheiden mit der Schreibweise $|A| = \infty$ keine Kardinalitäten (abzählbar, überabzählbar etc.).
- Für eine Menge A ist $2^A := \{B \subseteq A\}$ (oder $\mathcal{P}(A)$) die *Potenzmenge* von A . Es gilt $|2^A| = 2^{|A|}$, falls A endlich. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\binom{A}{k} := \{B \subseteq A : |B| = k\} \subseteq 2^A$$

die Menge der k -elementigen Teilmengen von A . Bekanntlich gilt $|\binom{A}{k}| = \binom{|A|}{k} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!}$, falls A endlich.

- Eine *Multimenge* auf einer Menge A ist (formal) eine Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{N}_0$. Anschaulich ist eine Multimenge eine Sammlung von Elementen aus A , wobei wie bei Mengen die Reihenfolge der Elemente keine Bedeutung hat, aber Elemente mehrfach vorkommen dürfen. Das Element $a \in A$ soll genau $f(a)$ -Mal vorkommen. Wir benutzen für Multimengen ebenfalls geschweifte Klammern.
- Für eine Menge A und $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\left(\binom{A}{k}\right)$ die Menge der k -elementigen Multimengen auf A .

Beispiel 1.2. Für $A = \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\binom{A}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

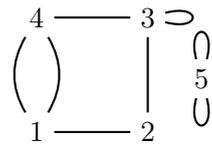
$$\left(\binom{A}{2}\right) = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}\}.$$

Definition 1.3. Ein *Graph* (genauer ungerichteter Multigraph) ist ein Tripel (E, K, φ) bestehend aus endlichen Mengen E (*Ecken*) und K (*Kanten*) und einer Abbildung $\varphi : K \rightarrow \binom{E}{2}$.

Bemerkung 1.4.

- (i) Sei $G := (E, K, \varphi)$ ein Graph und $x \in K$ mit $\varphi(x) = \{a, b\}$ (wir schreiben auch kürzer $x = ab$). Dann ist x eine Kante zwischen den Ecken a und b . Im Fall $a = b$ nennt man x eine *Schleife*. Im Fall $a \neq b$ nennt man a und b *benachbart*. Wir lassen auch zu, dass mehrere Kanten die gleichen Ecken verbinden. Man spricht dann von einer *mehrfachen* Kante. Ein Graph ohne Schleifen oder mehrfache Kanten heißt *einfach*. In diesem Fall ist $\varphi : K \rightarrow \binom{E}{2}$ injektiv und man kann K als Teilmenge von $\binom{E}{2}$ auffassen.
- (ii) Sei $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ und a_{ij} die Anzahl der Kanten zwischen e_i und e_j . Man nennt $A = A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^p \in \mathbb{C}^{p \times p}$ die *Adjazenzmatrix* von G .
- (iii) Ein *Weg* der *Länge* l von $e \in E$ nach $f \in E$ ist eine Folge $e = f_1, k_1, f_2, k_2, \dots, k_l, f_{l+1} = f$, wobei k_i eine Kante zwischen den Ecken f_i und f_{i+1} ist ($f_i = f_{i+1}$ ist erlaubt).

Beispiel 1.5. Der Graph



hat Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Satz 1.6. Sei G ein Graph mit Ecken e_1, \dots, e_p . Dann ist die Anzahl der Wege der Länge l zwischen e_i und e_j gleich dem Eintrag an Stelle (i, j) in $A(G)^l$.

Beweis. Sei $A(G) = (a_{ij})$. Dann gilt

$$(A(G)^l)_{ij} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{l-1} \leq p} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{l-1} j}$$

Die Anzahl der Wege von e_i nach e_j , die über die Ecken $e_{i_1}, \dots, e_{i_{l-1}}$ (in dieser Reihenfolge) verlaufen, ist genau $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{l-1} j}$, denn es gibt a_{ii_1} viele Kanten zwischen e_i und e_{i_1} , $a_{i_1 i_2}$ Kanten zwischen e_{i_1} und e_{i_2} usw. Dies zeigt die Behauptung. \square

Bemerkung 1.7 (Lineare Algebra). Die Adjazenzmatrix A eines Graphen ist offenbar reell und symmetrisch. Nach linearer Algebra sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ von A reell. Man nennt sie auch *Eigenwerte von G* . Außerdem existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ (Spaltenvektoren). Die Matrix $U \in \mathbb{R}^{p \times p}$ mit Spalten u_1, \dots, u_p erfüllt dann $U^{-1} = U^t$ und $U^t A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Folgerung 1.8. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ die Eigenwerte der Adjazenzmatrix A eines Graphen G . Seien $i, j \in \{1, \dots, p\}$. Dann existieren $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ mit

$$(A(G)^l)_{ij} = c_1 \lambda_1^l + \dots + c_p \lambda_p^l$$

für alle $l \geq 1$.

Beweis. Sei $U = (u_{st})_{s,t=1}^p$ wie in Bemerkung 1.7. Setze $c_k := u_{ik} u_{jk}$. Es gilt

$$A^l = (U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) U^{-1})^l = U \operatorname{diag}(\lambda_1^l, \dots, \lambda_p^l) U^{-1} = U \operatorname{diag}(\lambda_1^l, \dots, \lambda_p^l) U^t.$$

Daher ist $(A^l)_{ij} = \sum_{k=1}^p u_{ik} \lambda_k^l u_{jk} = c_1 \lambda_1^l + \dots + c_p \lambda_p^l$. \square

Definition 1.9. Ein Weg in einem Graphen heißt *geschlossen*, wenn Start- und Zielecke identisch sind.

Satz 1.10. In der Situation von Folgerung 1.8 ist $\lambda_1^l + \dots + \lambda_p^l$ die Anzahl aller geschlossenen Wege der Länge l .

Beweis. Die Anzahl der (geschlossenen) Wege der Länge l von e_i nach e_i ist der Eintrag von A^l an Stelle (i, i) . Die Anzahl aller geschlossenen Wege ist daher die Spur $\operatorname{tr}(A^l)$. Nach linearer Algebra ist die Spur einer Matrix gleich die Summe aller Eigenwerte. Wegen $U^{-1} A^l U = \operatorname{diag}(\lambda_1^l, \dots, \lambda_p^l)$ sind $\lambda_1^l, \dots, \lambda_p^l$ die Eigenwerte von A^l und die Behauptung folgt. \square

Beispiel 1.11. Der *vollständige* Graph K_p ist einfach mit Ecken $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ und Kanten $K = \binom{E}{2}$, d. h. je zwei verschiedene Ecken sind mit genau einer Kante verbunden. Offenbar ist $A(K_p) = J - 1_p$, wobei die $p \times p$ -Matrix J nur aus Einsen besteht.

Lemma 1.12. Die Eigenwerte von J sind 0 und p , wobei 0 mit Vielfachheit $p - 1$ auftritt (und p mit Vielfachheit 1).

Beweis. Offenbar ist $(1, \dots, 1)^t$ ein Eigenvektor von J zum Eigenwert p . Außerdem sind $(1, -1, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, -1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, -1)$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 0 . \square

Lemma 1.13. Die Eigenwerte von K_p sind $p - 1$ mit Vielfachheit 1 und -1 mit Vielfachheit $p - 1$.

Beweis. Jeder Eigenvektor v von J zum Eigenwert λ ist ein Eigenvektor von $J - 1_p$ zum Eigenwert $\lambda - 1$. Die Behauptung folgt daher aus Beispiel 1.11 und Lemma 1.12. \square

Folgerung 1.14. Die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge l in K_p mit vorgegebenem Start/Ziel ist

$$\frac{1}{p} ((p - 1)^l + (-1)^l (p - 1)).$$

Beweis. Die Eigenwerte von $A(K_p)^l$ sind $(p - 1)^l$ mit Vielfachheit 1 und $(-1)^l$ mit Vielfachheit $p - 1$. Nach Satz 1.10 ist $(p - 1)^l + (-1)^l (p - 1)$ die Anzahl aller geschlossenen Wege. Da K_p invariant unter Vertauschen von Ecken ist, hängt die Anzahl der geschlossenen Wege mit festem Start/Ziel nicht vom gewählten Start/Ziel ab. Dies zeigt die Behauptung. \square

Bemerkung 1.15. Da K_p keine Schleifen besitzt, entspricht jeder Weg der Länge l einer Folge $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{l+1}})$ mit $1 \leq i_j \leq p$ und $i_j \neq i_{j+1}$ für $j = 1, \dots, l$. Daher ist $\frac{1}{p} ((p - 1)^l + (-1)^l (p - 1))$ auch die Anzahl dieser Folgen mit vorgegebenem $i_1 = i_{l+1}$.

Folgerung 1.16. Die Anzahl der Wege der Länge l in K_p von e_i nach e_j mit $i \neq j$ ist

$$\frac{1}{p}((p-1)^l - (-1)^l).$$

Beweis. Da die Matrizen J und 1_p vertauschbar sind, ergibt die binomische Formel

$$A(K_p)^l = (J - 1_p)^l = \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \binom{l}{k} J^k$$

mit $J^0 := 1_p$. Sei $v := (1, \dots, 1)$. Dann ist $vv^t = p$ und $v^t v = J$. Es folgt $J^k = p^{k-1} J$ für $k \geq 1$. Dies zeigt

$$A(K_p)^l = \sum_{k=1}^l (-1)^{l-k} \binom{l}{k} p^{k-1} J + (-1)^l 1_p = \frac{1}{p}((p-1)^l - (-1)^l) J + (-1)^l 1_p.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 1.6. □

Lemma 1.17. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$\alpha_1^l + \dots + \alpha_s^l = \beta_1^l + \dots + \beta_t^l$$

für alle $l \geq 1$. Dann ist $s = t$ und $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, \dots, s$ bei geeigneter Nummerierung.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \min\{|\alpha_i|^{-1}, |\beta_j|^{-1} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\}$. Dann konvergieren die geometrischen Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i x)^i = \frac{\alpha_i x}{1 - \alpha_i x}$ absolut. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{\alpha_1 x}{1 - \alpha_1 x} + \dots + \frac{\alpha_s x}{1 - \alpha_s x} = \frac{\beta_1 x}{1 - \beta_1 x} + \dots + \frac{\beta_t x}{1 - \beta_t x}. \quad (1.1)$$

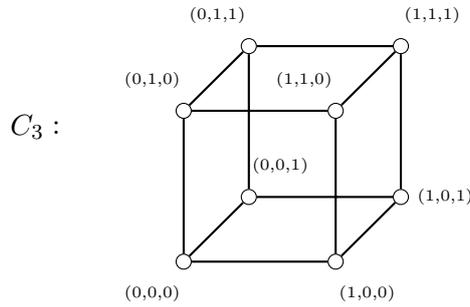
Indem man mit $(1 - \alpha_1 x) \dots (1 - \alpha_s x)(1 - \beta_1 x) \dots (1 - \beta_t x)$ auf beiden Seiten multipliziert, erhält man eine Gleichheit von Polynomen für unendlich viele Werte von x . Da jedes von Null verschiedene Polynom nur endlich viele Nullstellen besitzt, müssen die Polynome sogar für alle $x \in \mathbb{C}$ identisch sein. Also gilt auch (1.1) für fast alle $x \in \mathbb{C}$. Sei nun $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir multiplizieren (1.1) auf beiden Seiten mit $1 - \gamma x$ und lassen x gegen γ^{-1} gehen. Die linke Seite konvergiert dann gegen $|\{i : \alpha_i = \gamma\}|$ und die rechte gegen $|\{i : \beta_i = \gamma\}|$. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.18. Sei G ein Graph mit 12 Ecken und die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge l sei $3 \cdot 5^l + 4^l + 2(-2)^l + 4$. Nach Satz 1.10 und Lemma 1.17 sind $5, 5, 5, 4, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 0, 0$ die Eigenwerte von G .

2 Radon-Transformation

Definition 2.1. Sei $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe der Ordnung 2 bzgl. Addition. Sei $\mathbb{Z}_2^n := \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$ (n Faktoren). Sei $C_n := (E, K)$ der einfache Graph mit $E = \mathbb{Z}_2^n$ und $\{e, f\} \in K$ genau dann, wenn e und f sich an genau einer Koordinate unterscheiden. Man nennt C_n den n -Würfel.

Beispiel 2.2.



Definition 2.3.

(i) Die Menge \mathcal{V} aller Funktionen $\mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (f, g \in \mathcal{V}, x \in \mathbb{Z}_2^n, \lambda \in \mathbb{R})$$

zu einem \mathbb{R} -Vektorraum. Für $x \in \mathbb{Z}_2^n$ bilden die charakteristischen Funktionen f_x mit $f_x(y) = \delta_{xy}$ (Kronecker-Delta) eine Basis B_1 von \mathcal{V} . Insbesondere ist $\dim \mathcal{V} = 2^n$.

(ii) Für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ sei $x \cdot y := xy^t = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \in \mathbb{Z}_2$ (modulo 2). Offenbar gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Außerdem definiert

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt auf \mathcal{V} (bilinear, symmetrisch und positiv definit).

Lemma 2.4. Die Funktionen $\chi_x \in \mathcal{V}$ mit $\chi_x(y) = (-1)^{x \cdot y}$ für $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$ bilden eine Orthogonalbasis B_2 von \mathcal{V} .

Beweis. Für $x \neq y$ gilt

$$\langle \chi_x, \chi_y \rangle = \sum_{z \in \mathbb{Z}_2^n} \chi_x(z)\chi_y(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{x \cdot z}(-1)^{y \cdot z} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(x+y) \cdot z}.$$

Wegen $x \neq y$ ist $x + y$ an mindestens einer Koordinate 1. O. B. d. A. sei $x + y = (1, *, \dots, *)$. Dann gilt

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(x+y) \cdot z} = - \sum_{z \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(x+y) \cdot (z+(1,0,\dots,0))} = - \sum_{z' \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(x+y) \cdot z'} = 0.$$

Also sind die χ_x paarweise orthogonal und insbesondere linear unabhängig wegen $\chi_x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}_2^n$. Die Behauptung folgt nun aus $|B_2| = 2^n = \dim \mathcal{V}$. \square

Definition 2.5. Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ und $f \in \mathcal{V}$. Sei $\Phi_\Gamma f \in \mathcal{V}$ mit

$$\Phi_\Gamma f(x) := \sum_{y \in \Gamma} f(x + y) \quad (x \in \mathbb{Z}_2^n).$$

Man nennt Φ_Γ die (*diskrete* oder *endliche*) *Radontransformation* bzgl. Γ . Offenbar ist die Abbildung $\Phi_\Gamma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ linear.

Lemma 2.6. Für jedes $x \in \mathbb{Z}_2^n$ ist χ_x ein Eigenvektor von Φ_Γ zum Eigenwert $\lambda_x := \sum_{y \in \Gamma} (-1)^{x \cdot y}$.

Beweis. Für $z \in \mathbb{Z}_2^n$ gilt

$$\Phi_\Gamma \chi_x(z) = \sum_{y \in \Gamma} \chi_x(z+y) = \sum_{y \in \Gamma} (-1)^{x \cdot (z+y)} = (-1)^{x \cdot z} \sum_{y \in \Gamma} (-1)^{x \cdot y} = \chi_x(z) \lambda_x. \quad \square$$

Bemerkung 2.7. Nach Lemma 2.6 hängen die Eigenvektoren von Φ_Γ nicht von Γ ab (die Eigenwerte aber schon).

Definition 2.8. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\delta_i := (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni}) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$. Sei $\Delta := \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$.

Satz 2.9. Die Adjazenzmatrix $A(C_n)$ ist die Matrix von Φ_Δ bzgl. der Basis B_1 aus Definition 2.3.

Beweis. Erinnerung lineare Algebra: Die gesuchte Matrix $(c_{xy})_{x,y \in \mathbb{Z}_2^n}$ von Φ_Δ erfüllt $\Phi_\Delta f_x = \sum_{y \in \mathbb{Z}_2^n} c_{yx} f_y$. Für $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$ gilt

$$\Phi_\Delta f_x(y) = \sum_{z \in \Delta} f_x(y+z) = |\{z \in \Delta : x = y+z\}| = |\{z \in \Delta : x+z = y\}| = \sum_{z \in \Delta} f_{x+z}(y).$$

Dies zeigt $\Phi_\Delta f_x = \sum_{z \in \Delta} f_{x+z}$. Daher gilt $c_{yx} \in \{0, 1\}$ und $c_{yx} = 1 \Leftrightarrow \exists z \in \Delta : y = x+z \Leftrightarrow x+y \in \Delta \Leftrightarrow x$ und y sind in C_n benachbart. Die Behauptung folgt. \square

Folgerung 2.10. Für jedes $x \in \mathbb{Z}_2^n$ ist $E_x := ((-1)^{x \cdot y} : y \in \mathbb{Z}_2^n)$ ein Eigenvektor von $A(C_n)$ zum Eigenwert $\lambda_x := n - 2\omega(x)$, wobei $\omega(x)$ die Anzahl der Einsen in x ist. Insbesondere ist $\binom{n}{k}$ die Vielfachheit des Eigenwerts $n - 2k$ für $0 \leq k \leq n$.

Beweis. Nach Lemma 2.6 ist χ_x ein Eigenvektor von Φ_Δ . Schreibt man χ_x als Linearkombination der Basis B_1 , so bilden die Koeffizienten genau den Vektor E_x (also $\chi_x = \sum_{y \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{x \cdot y} f_y$). Daher ist E_x ein Eigenvektor der Matrix von Φ_Δ bzgl. B_1 . Nach Satz 2.9 ist E_x ein Eigenvektor von $A(C_n)$. Der entsprechende Eigenwert ist $\sum_{y \in \Delta} (-1)^{x \cdot y} = (n - \omega(x)) - \omega(x) = \lambda_x$ nach Lemma 2.6. Da die χ_x eine Basis bilden, bilden die E_x eine Basis von Eigenvektoren. Die Vielfachheit von $n - 2k$ ist $\binom{n}{k}$, da es genau $\binom{n}{k}$ Elemente $x \in \mathbb{Z}_2^n$ mit $\omega(x) = k$ gibt. \square

Bemerkung 2.11. In der Codierungstheorie (Diskrete Mathematik) nennt man $\omega(x)$ das *Hamming-Gewicht* von x .

Satz 2.12. Sei $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$ mit $\omega(x+y) = k$. Dann ist die Anzahl der Wege der Länge $l \geq 1$ von x nach y in C_n gleich

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j} (n-2i)^l,$$

wobei $\binom{n-k}{i-j} = 0$ für $i < j$. Im Fall $x = y$ erhält man

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-2i)^l.$$

Beweis. Wir benutzen Folgerung 1.8. Dafür müssen wir $A := A(C_n)$ diagonalisieren. Wir wissen bereits, dass die Eigenvektoren E_x von A eine Orthogonalbasis bilden (Lemma 2.4). Wir müssen diese Vektoren also noch normalisieren. Es gilt

$$|E_x|^2 = \sum_{y \in \mathbb{Z}_2^n} ((-1)^{x \cdot y})^2 = 2^n.$$

Mit den Bezeichnungen aus Folgerung 1.8 gilt daher $u_{xz} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(-1)^{x \cdot z}$ und $c_z = u_{xz}u_{yz} = \frac{1}{2^n}(-1)^{(x+y) \cdot z}$. Mit Folgerung 2.10 folgt

$$(A^l)_{xy} = \sum_{z \in \mathbb{Z}_2^n} c_z \lambda_z^l = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}_2^n, \\ \omega(z)=i}} (-1)^{(x+y) \cdot z} (n-2i)^l.$$

Für $1 \leq j \leq k$ gibt es genau $\binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}$ Vektoren $z \in \mathbb{Z}_2^n$ mit $\omega(z) = i$, sodass $x+y$ und z genau j gemeinsame Einsen haben (wegen $\omega(x+y) = k$ gibt es $\binom{k}{j}$ Möglichkeiten diese Einsen zu wählen und $\binom{n-k}{i-j}$ Möglichkeiten die verbleibenden Einsen von z zu verteilen). Es gilt dann $(-1)^{(x+y) \cdot z} = (-1)^j$ und

$$(A^l)_{xy} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j} (n-2i)^l.$$

Im Fall $x = y$ ist $k = 0$ und die zweite Behauptung folgt. \square

Bemerkung 2.13.

(i) Offenbar besitzt C_n keine geschlossenen Wege mit ungerader Länge l . In der Tat ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-2i)^l &= \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left[\binom{n}{i} (n-2i)^l + \binom{n}{n-i} (n-2(n-i))^l \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left[\binom{n}{i} (n-2i)^l - \binom{n}{i} (n-2i)^l \right] = 0. \end{aligned}$$

(ii) Für $k = 1$ erhält man

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} \right] (n-2i)^l = \frac{1}{2^n n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-2i)^{l+1},$$

denn

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} &= \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} - \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{(n-1)!(n-i) - (n-1)!i}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{n-2i}{n} = \binom{n}{i} \frac{n-2i}{n} \end{aligned}$$

für $0 \leq i \leq n$. Dies ist die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge $l+1$ geteilt durch n . In der Tat gibt für jeden der n Nachbarn y von x gleich viele geschlossene Wege von x nach x , die zuletzt y besuchen.

3 Irrfahrten

Bemerkung 3.1. Im Folgenden betrachten wir ausschließlich *zusammenhängende* Graphen mit mindestens zwei Ecken, d. h. je zwei Ecken x, y sind durch (mindestens) einen Weg verbunden. Eine *Irrfahrt* von x nach y ist ein Weg, dessen Bestandteile zufällig und gleichverteilt gewählt werden.

Definition 3.2. Sei $G = (E, K, \varphi)$ ein Graph. Der *Grad* einer Ecke $x \in E$ ist die Anzahl d_x aller Kanten (einschließlich Schleifen), die x enthalten. Sei $A(G) = (a_{xy})$. Wir nennen $M(G) := (a_{xy}/d_x)$ die *Wahrscheinlichkeitsmatrix* von G (beachte: $d_x > 0$, da G zusammenhängend und $|E| > 1$).

Bemerkung 3.3.

- (i) Achtung: Im Gegensatz zu $A(G)$ ist $M(G)$ nicht unbedingt symmetrisch.
- (ii) Der Eintrag a_{xy}/d_x von $M(G)$ ist die Wahrscheinlichkeit in einem Schritt (einer Irrfahrt) von x nach y zu gelangen, denn jede der a_{xy} Kanten zwischen x und y wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt. Wie in Satz 1.6 zeigt man, dass $(M(G)^l)_{xy}$ die Wahrscheinlichkeit ist, auf einer Irrfahrt der Länge l von x nach y zu gelangen.
- (iii) Wir betrachten nun Irrfahrten mit vorgegebenem Startpunkt. Sei ρ_x die (vorgegebene) Wahrscheinlichkeit, dass eine Irrfahrt mit $x \in E$ beginnt ($\sum_{x \in E} \rho_x = 1$). Sei $P = (\rho_x : x \in E)$. Der Eintrag von $PM(G)^l$ an Position $y \in E$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Irrfahrt der Länge l bei y endet. Durch Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten kann man wie im letzten Kapitel explizite Formeln für diese Wahrscheinlichkeiten angeben.
- (iv) Man nennt G *regulär vom Grad d* , falls $M(G) = \frac{1}{d}A(G)$ gilt (d. h. alle Ecken haben den gleichen Grad d). In diesem Fall haben $A(G)$ und $M(G)$ die gleichen Eigenvektoren und die Eigenwerte entsprechen sich durch $\lambda \leftrightarrow \frac{\lambda}{d}$.

Beispiel 3.4. Der n -Würfel C_n ist regulär vom Grad n . Sei $x \in \mathbb{Z}_2^n$ beliebig. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Irrfahrt von x nach l Schritten bei x endet ist

$$\frac{1}{2^n n^l} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-2i)^l$$

wie in Satz 2.12.

Satz 3.5. Die Wahrscheinlichkeitsmatrix eines Graphen ist diagonalisierbar und besitzt nur reelle Eigenwerte.

Beweis. Sei $G = (E, K, \varphi)$ ein Graph und $D := \text{diag}(\sqrt{d_x} : x \in E)$. Mit $M = M(G) = (a_{xy}/d_x)_{x,y \in E}$ gilt dann

$$(DMD^{-1})_{xy} = \sqrt{d_x} \frac{a_{xy}}{d_x} \frac{1}{\sqrt{d_y}} = \frac{a_{xy}}{\sqrt{d_x d_y}} = (DMD^{-1})_{yx}.$$

Also ist DMD^{-1} reell und symmetrisch. Insbesondere ist DMD^{-1} diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Sicher ist dann auch M diagonalisierbar mit den gleichen Eigenwerten. \square

Bemerkung 3.6. Sei $H(x, y)$ die durchschnittliche Anzahl an Schritten (Erwartungswert), die eine Irrfahrt von x nach y benötigt. Wir setzen $H(x, x) = 0$. Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass eine Irrfahrt von x nach n Schritten erstmals y erreicht. Dann ist

$$H(x, y) = \sum_{n \geq 1} np_n.$$

Wir zeigen, dass $H(x, y)$ stets endlich ist (Satz 3.15).

Beispiel 3.7. Sei



Jede Irrfahrt von x geht mit Wahrscheinlichkeit 1 nach z und danach mit Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{2}$ nach x oder y . Daher gilt

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} (2 + H(x, y)) = 4.$$

Bemerkung 3.8. Im Folgenden betrachten wir $\mathbb{C}^{n \times m}$ als vollständigen normierten \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $2nm$ mit der euklidischen Norm

$$\|a_{ij}\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i,j} |\operatorname{Re}(a_{ij})|^2 + |\operatorname{Im}(a_{ij})|^2}.$$

Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ gilt

- $|A| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $A = 0$ (*positiv definit*),
- $|\lambda A| = |\lambda| |A|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (*homogen*),
- $|A + B| \leq |A| + |B|$ (*Dreiecksungleichung*).

Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times l}$ gilt

$$|AB|^2 = \sum_{i,j} \left| \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^m |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{s=1}^m |b_{sj}|^2 \right) = |A|^2 |B|^2 \quad (3.1)$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Für eine Folge $(A_k)_k \in \mathbb{C}^{n \times m}$ schreiben wir $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} |A - A_k| = 0$. In diesem Fall konvergiert auch jeder Eintrag in A_k gegen den entsprechenden Eintrag in A . Für $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ und $B = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k B_k = AB,$$

denn

$$\begin{aligned} |AB - A_k B_k| &= |AB - AB_k + AB_k - A_k B_k| \leq |A(B - B_k)| + |(A - A_k)B_k| \\ &\stackrel{(3.1)}{\leq} |A| |B - B_k| + |B_k| |A - A_k| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sind alle A_k invertierbar, so auch A und es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k^{-1} = A^{-1}$ (setze $B_k = A_k^{-1}$). Dies zeigt, dass Matrizenmultiplikation und -inversion stetige Abbildungen sind. Nach der Leibniz-Formel ist auch die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Definition 3.9. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt

$$\rho_A := \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A\}$$

Spektralradius von A .

Lemma 3.10. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

$$\rho_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|A^k|}.$$

Außerdem ist $\rho_A \leq \sqrt[k]{|A^k|}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Bekanntlich sind alle Normen eines endlich-dimensionalen euklidischen Raums äquivalent. Für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ existieren also Konstanten $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda|A^k| \leq \|A^k\| \leq \mu|A^k|$ für alle k . Es folgt

$$\sqrt[k]{\lambda} \sqrt[k]{|A^k|} \leq \sqrt[k]{\|A^k\|} \leq \sqrt[k]{\mu} \sqrt[k]{|A^k|}.$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\lambda} = 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\mu}$ kommt es für die erste Behauptung also nicht auf die Wahl der Norm an.

Sei $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, sodass $SAS^{-1} = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{n_s}(\lambda_s)$ die Jordansche Normalform von A ist. Offenbar definiert $\|(b_{ij})\|' := \max_{i,j} |b_{ij}|$ eine Norm (positiv definit, homogen und Dreiecksungleichung) und daher auch $\|B\| := \|SBS^{-1}\|'$. Sicher ist nun $\|A\| = \max\{1, |\lambda_i|\}$ und $\rho_A = \max\{|\lambda_i|\}$. Wir können also $A = J_n(\lambda)$ und $S = 1$ annehmen. Durch Induktion nach k erhält man

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & & & \\ k\lambda^{k-1} & \ddots & & & \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} & \dots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Für $0 \leq l \leq n-1$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\binom{k}{l} |\lambda|^{k-l}} = \frac{|\lambda|}{l!} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k(k-1)\dots(k-l+1)} \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^{-l/k} = \frac{|\lambda|}{l!}$$

(Analysis 1). Dies zeigt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = |\lambda| = \rho_A$.

Die zweite Aussage ergibt sich $\rho_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|A^k|} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|A|^k} = |A|$ und $\rho_A^k = \rho_{A^k} \leq |A^k|$. \square

Lemma 3.11. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\rho_A < 1$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (1_n - A)^{-1} \quad (\text{geometrische Reihe für Matrizen}).$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ mit $\mu := \rho_A + \epsilon < 1$. Nach Lemma 3.10 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|A^k|} < \mu$ für alle $k \geq N$. Dies zeigt $|A^k| < \mu^k \rightarrow 0$ und

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |A^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k = \frac{1}{1-\mu} < \infty.$$

Also ist $B := \sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $B(1_n - A) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s A^k (1_n - A) = \lim_{s \rightarrow \infty} (1_n - A^{s+1}) = 1_n$. \square

Definition 3.12. Man nennt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

- *positiv* (bzw. *nicht-negativ*), falls $a_{ij} > 0$ (bzw. $a_{ij} \geq 0$) für alle i, j gilt.
- *reduzibel*, falls $n = m$ und $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \notin I$ existiert. Gegebenenfalls existiert eine Permutationsmatrix P mit $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & T \end{pmatrix}$.
- *irreduzibel*, falls nicht reduzibel.

Wir schreiben $A < B$ (bzw. $A \leq B$), falls $B - A$ positiv (bzw. nicht-negativ) ist.

Beispiel 3.13. Für zusammenhängende Graphen G sind $A(G)$ und $M(G)$ stets nicht-negativ und irreduzibel.

Satz 3.14 (PERRON-FROBENIUS). *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht-negativ. Dann ist ρ_A ein Eigenwert von A mit nicht-negativem Eigenvektor v . Ist A irreduzibel, so ist $v > 0$ und v ist bis auf Skalierung der einzige Eigenvektor zum Eigenwert ρ_A . In diesem Fall ist v bis auf Skalierung auch der einzige nicht-negative Eigenvektor insgesamt (unabhängig vom Eigenwert).*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ρ_A ein Eigenwert ist. Das ist klar, falls $\rho_A = 0$. Sei also $\rho_A > 0$. Indem man A durch $\rho_A^{-1}A$ ersetzt, kann man $\rho_A = 1$ annehmen. Für $0 < t < 1$ und $m \in \mathbb{N}$ ist $\rho_{tA} = t < 1$ und

$$(1 - tA)^{-1} \stackrel{3.11}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (tA)^k \geq 1_n + tA + \dots + (tA)^m.$$

Ist 1 kein Eigenwert von A , so ist $1 - A$ invertierbar und es gilt

$$(1 - A)^{-1} = (\lim_{t \rightarrow 1} (1 - tA))^{-1} \stackrel{3.8}{=} \lim_{t \rightarrow 1} (1 - tA)^{-1} \geq \lim_{t \rightarrow 1} (1_n + tA + \dots + (tA)^m) = 1_n + A + \dots + A^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = 0$ im Widerspruch zu $1 = \rho_A^m = \rho_{A^m} \leq |A^m|$ aus Lemma 3.10.

Wir zeigen nun, dass jede positive Matrix A einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert ρ_A besitzt. Wie oben können wir $\rho_A = 1$ annehmen. Sei $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A . Sei $v^+ := (|v_1|, \dots, |v_n|)$. Dann ist

$$v^+ = (Av)^+ \leq Av^+,$$

also $w := (A - 1_n)v^+ \geq 0$. Im Fall $w = 0$ ist $v^+ = Av^+ > 0$ ein positiver Eigenvektor von A . Sei nun $w \neq 0$. Dann ist $Aw > 0$. Daher existiert ein $\epsilon > 0$ mit $Aw \geq \epsilon Av^+$. Für $z := Av^+ > 0$ gilt

$$(A - 1_n)z = (A - 1_n)Av^+ = Aw \geq \epsilon z,$$

also $Az \geq (1 + \epsilon)z$. Für $B := (1 + \epsilon)^{-1}A$ folgt $Bz \geq z$ und $B^k z \geq z$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Andererseits ist $\rho_B = (1 + \epsilon)^{-1}\rho_A < 1$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$ nach Lemma 3.11. Widerspruch.

Sei nun $A \geq 0$ und $A_k := A + \frac{1}{k}J > 0$, wobei $J = (1)_{i,j=1}^n$. Sicher ist $A_1 > A_2 > \dots > A$ und $A_1^m > A_2^m > \dots > A^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Aus Lemma 3.10 folgt $\rho_{A_1} \geq \rho_{A_2} \geq \dots \geq \rho_A$. Insbesondere existiert $\mu := \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{A_k} \geq \rho_A$. Nach dem letzten Absatz existieren positive Eigenvektoren v_k von A_k zum Eigenwert ρ_{A_k} . Nach Normierung gilt $|v_k| = 1$. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt $(v_k)_k$ eine konvergente Teilfolge. O. B. d. A. sei also $v := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k \geq 0$. Wegen $|v| = 1$ ist auch $v \neq 0$. Außerdem gilt

$$Av = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{A_k} v_k = \mu v.$$

Wegen $\mu \geq \rho_A$ folgt $\mu = \rho_A$.

Sei schließlich A nicht-negativ und irreduzibel. Wie oben sei $v \geq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert ρ_A . Sei P eine Permutationsmatrix mit $w := Pv = (w_1, \dots, w_k, 0, \dots, 0)$, wobei $w_1, \dots, w_k > 0$. Sicher ist $PAP^{-1}w = \rho_A w$. Sei $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ mit $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Für $u := (w_1, \dots, w_k)$ gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11}u \\ A_{21}u \end{pmatrix} = PAP^{-1}w = \begin{pmatrix} \rho_A u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus $A_{21}u = 0$, $A_{21} \geq 0$ und $u > 0$ folgt $A_{21} = 0$. Da A irreduzibel ist, geht dies nur im Fall $k = n$. Also ist v ein positiver Eigenvektor zum Eigenwert ρ_A .

Sei auch $Aw = \rho_A w$ mit $w \neq 0$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $v' := \lambda v - w \geq 0$, sodass v' nicht positiv ist. Wiederholt man das obige Argument mit v' anstatt v , so folgt $v' = 0$ und $w = \lambda v$ wie gewünscht.

Sei nun $w \geq 0$ ein beliebiger Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Wie oben folgt $w > 0$ aus der Irreduzibilität von A . Dies zeigt $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Da auch A^t nicht-negativ und irreduzibel ist, existiert $u > 0$ mit $A^t u = \rho_{A^t} u = \rho_A u$. Wegen

$$0 < \lambda w^t u = (Aw)^t u = w^t A^t u = \rho_A w^t u$$

gilt $\lambda = \rho_A$ und $w \in \mathbb{R}v$. Also ist v bis auf Skalierung der einzige nicht-negative Eigenvektor von A . \square

Satz 3.15. Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph mit Ecken $x \neq y$. Sei $M := M(G) = (m_{ef})_{e,f \in E}$ und $M[y] = (m_{ef})_{e,f \in E \setminus \{y\}}$ die Matrix, die aus M entsteht, indem die y -te Zeile und Spalte streicht. Sei $T[y] = (m_{ey})_{e \in E \setminus \{y\}}$. Dann ist $1 - M[y]$ invertierbar und $H(x, y)$ ist der x -te Eintrag von $(1 - M[y])^{-2} T[y]$.

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit nach l Schritten einer Irrfahrt von x nach z zu gelangen ohne y besucht zu haben ist offenbar $(M[y]^l)_{xz}$ (entferne y und die anliegenden Kanten aus G). Die Wahrscheinlichkeit, dass man im nächsten Schritt y erreicht ist m_{zy} . Daher gilt

$$H(x, y) = \sum_{z \neq y} m_{zy} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) (M[y]^l)_{xz}. \quad (3.2)$$

Wir zeigen $\rho := \rho_{M[y]} < 1$ mit Satz 3.14. Offenbar ist $M[y]$ nicht-negativ, aber nicht unbedingt irreduzibel (da G durch Entfernen von y in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfallen könnte). In jedem Fall existiert eine Permutationsmatrix P , sodass

$$PM[y]P^{-1} = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & M_s \end{pmatrix}$$

mit irreduziblen Matrizen M_1, \dots, M_s (jedes M_i entspricht einer Zusammenhangskomponente). Für die Bestimmung von ρ dürfen wir daher annehmen, dass $M[y]$ (und damit auch $M[y]^t$) irreduzibel ist. Nach Satz 3.14 existiert ein positiver Eigenvektor $v = (v_1, \dots, v_p)$ von $M[y]^t$ zum Eigenwert ρ . Es gilt dann $vM[y] = (M[y]^t v^t)^t = \rho v$. Seien r_1, \dots, r_p die Zeilensummen von $M[y]$. Nach Definition sind alle Zeilensummen von M gleich 1. Da y mindestens eine benachbarte Ecke hat, ist mindestens ein r_i echt kleiner 1, o. B. d. A. $r_1 < 1$. Sei $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt

$$\rho(v_1 + \dots + v_p) = \rho v e^t = (vM[y])e^t = v(M[y]e^t) = r_1 v_1 + \dots + r_p v_p < v_1 + \dots + v_p$$

wegen $v_1 > 0$. Dies zeigt $\rho < 1$. Nach Lemma 3.11 ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} M[y]^l = (1 - M[y])^{-1}.$$

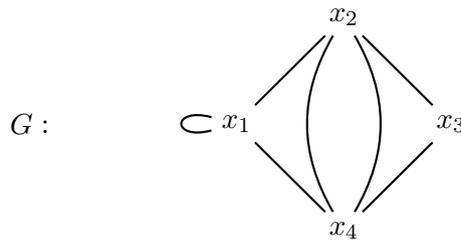
Es folgt

$$(1 - M[y])^{-2} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} M[y]^l \right)^2 = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)M[y]^l.$$

Mit (3.2) ergibt sich

$$H(x, y) = \sum_{z \neq y} m_{zy} ((1 - M[y])^{-2})_{xz} = ((1 - M[y])^{-2} T[y])_x. \quad \square$$

Beispiel 3.16. Sei



Dann ist

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad 1_3 - M[x_4] = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1_3 - M[x_4])^{-2} = \begin{pmatrix} 55/16 & 13/6 & 17/24 \\ 13/8 & 7/3 & 11/12 \\ 17/16 & 11/6 & 13/8 \end{pmatrix} \quad (1_3 - M[x_4])^{-2} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/12 \\ 13/6 \\ 25/12 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.17. Google nutzt den Satz von Perron-Frobenius zur Bewertung von Webseiten (*PageRank-Algorithmus*).

4 Die Sperner-Eigenschaft

Definition 4.1. Eine Relation \leq auf einer Menge A heißt *Ordnungsrelation* (oder *partielle Ordnung*), falls für alle $a, b, c \in A$ gilt:

- $a \leq a$ (reflexiv),
- $a \leq b \leq a \implies a = b$ (antisymmetrisch),
- $a \leq b \leq c \implies a \leq c$ (transitiv).

Gegebenenfalls nennt man (A, \leq) eine *geordnete Menge*. Man schreibt auch $a \geq b$, falls $b \leq a$ und $a < b$ (bzw. $a > b$), falls $a \leq b \neq a$ (bzw. $b \leq a \neq b$). Wir schreiben $a \ll b$, falls $a < b$ und kein c mit $a < c < b$ existiert (analog $a \gg b$).

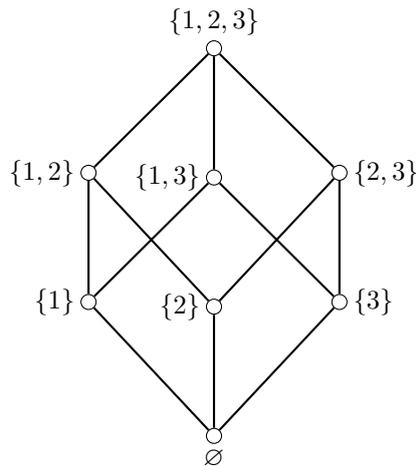
Beispiel 4.2.

- (i) Die übliche „Kleiner-gleich-Relation“ \leq auf \mathbb{R} .

- (ii) Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf \mathbb{N} , aber nicht auf \mathbb{Z} , denn $1 \mid -1 \mid 1$.
- (iii) Die Teilmengenrelation \subseteq auf 2^A für jede Menge A . Im Fall $|A| = n < \infty$ nennt man $B_A := 2^A$ die *boolesche Algebra vom Rang n* (bzgl. der Operationen \cup und \cap). Wir setzen $B_n := B_{\{1, \dots, n\}}$.

Definition 4.3. Das *Hasse-Diagramm* einer endlichen geordneten Menge A ist ein Graph mit Eckenmenge A und Kanten der Form $a < b$, wobei b „oberhalb“ von a platziert wird. Wegen der Transitivität ist die Ordnungsrelation vollständig durch das Hasse-Diagramm bestimmt.

Beispiel 4.4. Das Hasse-Diagramm von B_3 ist



Definition 4.5. Ein *Isomorphismus* zwischen geordneten Mengen (A, \leq) und (B, \preceq) ist eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ mit $x \leq y \iff f(x) \preceq f(y)$ für alle $x, y \in A$. Gegebenenfalls nennt man A und B *isomorph* (dies bedeutet, dass sich A und B nur durch Benennung der Elemente unterscheiden).

Beispiel 4.6. Offenbar gibt es nur eine geordnete Menge mit einem Element (bis auf Isomorphie). Dagegen gibt es zwei geordnete Mengen mit zwei Elementen (bis auf Isomorphie): $(\{1, 2\}, =)$ und $(\{1, 2\}, \leq)$.

Definition 4.7. Eine endliche Teilmenge K einer geordneten Menge A heißt *Kette der Länge n* , falls $|K| = n + 1$ und für alle $x, y \in K$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$ (man sagt auch K ist *total* geordnet). Man kann dann die Elemente von K eindeutig in der Form

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

anordnen. Man nennt K

- *saturiert*, falls $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.
- *maximal*, falls keine Kette $L \subseteq A$ mit $K \subsetneq L$ existiert.

Man nennt A *graduirt vom Rang n* , wenn jede maximale Kette in A Länge n hat.

Beispiel 4.8.

- (i) B_n ist graduirt vom Rang n (jede maximale Kette enthält genau eine k -elementige Teilmenge für $k = 0, \dots, n$).

(ii) Jede maximale Kette ist saturiert, aber nicht unbedingt umgekehrt.

Definition 4.9. Sei A geordnet und graduiert vom Rang n . Ein Element $a \in A$ hat *Rang* k , falls die längste saturierte Kette $x_0 < \dots < x_k = a$ Länge k hat. Wir schreiben dann $\rho(a) := k$ und nennen $A_k := \{a \in A : \rho(a) = k\}$ den k -Level von A . Es gilt $A = A_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n$. Außerdem sei

$$F(A, x) := \sum_{i=0}^n |A_i| x^i.$$

Wir nennen A

- *Rang-symmetrisch*, falls $|A_k| = |A_{n-k}|$ für $k = 0, \dots, n$ gilt.
- *Rang-unimodal*, falls $|A_0| \leq |A_1| \leq \dots \leq |A_i| \geq |A_{i+1}| \geq \dots \geq |A_n|$ für ein i gilt.

Beispiel 4.10. Für $x \in A := B_n$ gilt $\rho(x) = |x|$ und $A_k = \binom{[1, \dots, n]}{k}$. Es folgt

$$F(B_n, x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (x+1)^n.$$

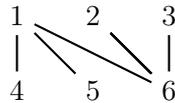
Sicher ist B_n Rang-symmetrisch und -unimodal (mit $i = \lfloor n/2 \rfloor$, Stichwort: Pascalsches Dreieck).

Definition 4.11. Eine *Antikette* einer geordneten Menge A ist eine Teilmenge $B \subseteq A$, sodass für alle $x, y \in B$ weder $x < y$ noch $y < x$ gilt (äquivalent: $x \leq y \implies x = y$). Die Mengen A_k sind offenbar Antiketten. Wir sagen: A besitzt die *Sperner-Eigenschaft*, falls A graduiert vom Rang n ist und

$$\max\{|B| : B \text{ ist Antikette von } A\} = \max\{|A_k| : 0 \leq k \leq n\}.$$

Achtung: Das heißt nicht, dass alle Antiketten die Form A_k haben.

Beispiel 4.12. Die geordnete Menge A mit Hasse-Diagramm



ist graduiert vom Rang 1. Es gilt $A_0 = \{4, 5, 6\}$ und $A_1 = \{1, 2, 3\}$. Andererseits ist $\{2, 3, 4, 5\}$ eine Antikette. Daher besitzt A *nicht* die Sperner-Eigenschaft.

Definition 4.13. Sei A geordnet und graduiert vom Rang n . Eine injektive Abbildung $f : A_i \rightarrow A_{i+1}$ (bzw. $f : A_{i+1} \rightarrow A_i$) heißt *Monomorphismus*, falls $x < f(x)$ (bzw. $f(x) < x$) für alle $x \in A_i$ (bzw. $x \in A_{i+1}$) gilt. (Es gilt dann $x < f(x)$ bzw. $f(x) < x$.)

Lemma 4.14. Sei A geordnet und graduiert vom Rang n . Angenommen es existiert $1 \leq i \leq n$ und *Monomorphismen*

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_i \leftarrow A_{i+1} \leftarrow \dots \leftarrow A_n.$$

Dann ist A Rang-unimodal und erfüllt die Sperner-Eigenschaft.

Beweis. Da Monomorphismen injektiv sind, gilt $|A_0| \leq |A_1| \leq \dots \leq |A_i| \geq |A_{i+1}| \geq \dots \geq |A_n|$, d. h. A ist Rang-unimodal.

Wir konstruieren nun einen Graphen G mit Eckenmenge A und Kanten $\{x, f(x)\}$, wobei f einer der angegebenen Monomorphismen ist (G ist ein Teilgraph des Hasse-Diagramms von A). Die Komponenten von G sind dann sicher Ketten von A (möglicherweise einelementig). Jede solche Kette enthält genau ein Element aus A_i (liegt ein $x \in A_i$ nicht im Bild einer der beiden Monomorphismen, so ist $\{x\}$ selbst eine dieser Ketten). Die Anzahl dieser Ketten ist daher $|A_i|$. Jede Antikette kann jede der $|A_i|$ Ketten in höchstens einem Element schneiden. Dies zeigt die Sperner-Eigenschaft. \square

Bemerkung 4.15. Für eine beliebige Menge A sei $\mathbb{R}A$ ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Basis A (also die Menge der formalen Linearkombinationen $\sum_{a \in A} \lambda_a a$ mit $\lambda_a \in \mathbb{R}$).

Lemma 4.16. *Sei A geordnet und graduiert vom Rang n . Angenommen es existiert eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}A_k \rightarrow \mathbb{R}A_{k+1}$ mit der Eigenschaft: Für alle $x \in A_k$ ist $f(x)$ eine Linearkombination von Elementen $y \in A_{k+1}$ mit $x < y$. Ist f injektiv (bzw. surjektiv), so existiert ein Monomorphismus $A_k \rightarrow A_{k+1}$ (bzw. $A_{k+1} \rightarrow A_k$).*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall „ f injektiv“ (surjektiv ist analog). Sei M die Matrix von f bzgl. der Basen $A_k = \{a_1, \dots, a_r\}$ und $A_{k+1} = \{b_1, \dots, b_s\}$. Nach Voraussetzung hat M Rang r . Nach Umsortierung können wir annehmen, dass die ersten r Zeilen von M linear unabhängig sind. Sei $M' = (m_{ij})$ die entsprechende $r \times r$ -Untermatrix von M . Nach der Leibniz-Formel gilt

$$0 \neq \det(M') = \sum_{\pi \in S_r} \pm m_{1\pi(1)} \dots m_{r\pi(r)}.$$

Daher existiert ein $\pi \in S_r$ mit $m_{1\pi(1)} \dots m_{r\pi(r)} \neq 0$. Für $i = 1, \dots, r$ ist daher b_i ein Summand von $f(a_{\pi(i)})$. Nach Voraussetzung ist $a_{\pi(i)} < b_i$. Die Abbildung $A_k \rightarrow A_{k+1}$, $a_i \rightarrow b_{\pi^{-1}(i)}$ ist daher ein Monomorphismus. \square

Lemma 4.17. *Sei $A := B_n$ und $f_k : \mathbb{R}A_k \rightarrow \mathbb{R}A_{k+1}$ linear mit*

$$f_k(x) = \sum_{\substack{y \in A_{k+1}, \\ x \subseteq y}} y$$

für $x \in A_k$. Für $k < n/2$ ist f_k injektiv und für $k \geq n/2$ ist f_k surjektiv. Außerdem erfüllt f_k die Voraussetzung von Lemma 4.16.

Beweis. Nach Beispiel 4.10 besteht A_k aus den Teilmengen x mit $|x| = k$. Wir definieren „duale“ lineare Abbildungen $g_k : \mathbb{R}A_k \rightarrow \mathbb{R}A_{k-1}$ durch

$$g_k(x) = \sum_{\substack{y \in A_{k-1}, \\ y \subseteq x}} y$$

für $x \in A_k$. Seien $[f_k]$ und $[g_k]$ die Matrizen von f_k und g_k bzgl. der Basen A_k und A_{k+1} (bzw. A_{k-1}). Der Eintrag an Position (x, y) ($x \in A_k$ und $y \in A_{k-1}$) von $[g_k]$ ist genau dann 1, wenn $y \subseteq x$. Dies ist also genau der Eintrag von $[f_{k-1}]$ an Position (y, x) . Daher ist $[f_{k-1}]^t = [g_k]$. Wir zeigen nun

$$g_{k+1} \circ f_k - f_{k-1} \circ g_k = (n - 2k) \text{id} \tag{4.1}$$

für $k = 0, \dots, n$, wobei $g_{n+1} \circ f_n := 0 =: f_{-1} \circ g_0$. Für $x \in A_k$ gilt

$$g_{k+1}(f_k(x)) = g_{k+1} \left(\sum_{\substack{|y|=k+1 \\ x \subseteq y}} y \right) = \sum_{\substack{|y|=k+1 \\ x \subseteq y}} \sum_{\substack{|z|=k \\ z \subseteq y}} z.$$

Die Bedingung $x, z \subseteq y$ kann nur im Fall $|x \cap z| \geq k - 1$ gelten. Für $|x \cap z| = k - 1$ ist $y = x \cup z$. Im Fall $x = z$ gibt es genau $n - k$ Möglichkeiten für y . Daher ist

$$g_{k+1}(f_k(x)) = (n - k)x + \sum_{\substack{|z|=k \\ |x \cap z|=k-1}} z.$$

Analog ist

$$f_{k-1}(g_k(x)) = \sum_{\substack{|y|=k-1 \\ y \subseteq x}} \sum_{\substack{|z|=k \\ y \subseteq z}} z$$

Die Bedingung $y \subseteq x \cap z$ kann nur im Fall $|x \cap z| \geq k - 1$ gelten. Für $|x \cap z| = k - 1$ ist $y = x \cap z$. Im Fall $x = z$ gibt es k Möglichkeiten für y . Dies zeigt

$$f_{k-1}(g_k(x)) = kx + \sum_{\substack{|z|=k \\ |x \cap z|=k-1}} z$$

und (4.1) folgt.

Sei nun $k < n/2$. Die reelle Matrix $M := [f_{k-1}][g_k] = [f_{k-1}][f_{k-1}]^t$ ist symmetrisch und positiv semidefinit (d. h. $xMx^t = |x[f_{k-1}]|^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{|A_k|}$). Daher sind alle Eigenwerte von M reell und nicht-negativ ($0 \leq xMx^t = \lambda|x|^2$). Wegen $[g_{k+1}][f_k] = M + (n - 2k)1$ sind die Eigenwerte von $[g_{k+1}][f_k]$ positiv, denn $n - 2k > 0$. Insbesondere ist $[g_{k+1}][f_k]$ invertierbar und f_k ist injektiv. Für $k \geq n/2$ ist analog

$$f_k \circ g_{k+1} = g_{k+2} \circ f_{k+1} + (2k + 2 - n) \text{id}$$

invertierbar und f_k ist surjektiv.

Offensichtlich erfüllt f_k in beiden Fällen die Voraussetzung aus Lemma 4.16. □

Satz 4.18 (Sperner). *Die maximale Größe einer Antikette in B_n ist $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Insbesondere besitzt B_n die Sperner-Eigenschaft.*

Beweis. Folgt aus Lemma 4.17, Lemma 4.16 und Lemma 4.14. □

2. *Beweis (Lubell).* Wir zählen die maximalen Ketten $\emptyset = x_0 < \dots < x_n = \{1, \dots, n\}$ in B_n . Es gibt n Möglichkeiten für x_1 . Ist x_1 fest, so verbleiben noch $n - 1$ Möglichkeiten für x_2 usw. Also gibt es genau $n!$ maximale Ketten. Sei nun $x \in B_n$ fest mit Rang $\rho(x) = |x| = k$. Dann gibt es genau $k!(n - k)!$ maximale Ketten, die x enthalten (für x_1 gibt es k Möglichkeiten, für x_2 gibt es $k - 1$ Möglichkeiten, \dots , für $x_k = x$ gibt es eine Möglichkeit, für x_{k+1} gibt es $n - k$ Möglichkeiten usw.). Sei nun A eine Antikette in B_n und $x \in A$. Sei K_x die Menge aller maximalen Ketten, die x enthalten. Enthält eine (maximale) Kette sowohl x als auch y , so gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Daher sind die Mengen K_x mit $x \in A$ paarweise disjunkt. Dies zeigt

$$\sum_{x \in A} |x|!(n - |x|)! = \sum_{x \in A} |K_x| = \left| \bigcup_{x \in A} K_x \right| \leq n!.$$

Division durch $n!$ liefert

$$|A| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq \sum_{x \in A} \frac{1}{\binom{n}{|x|}} \leq 1.$$

Daher ist $|A| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. □

Bemerkung 4.19. Ist n gerade, so gilt $\binom{n}{n/2-1} < \binom{n}{n/2} > \binom{n}{n/2+1}$. Der obige Beweis zeigt dann, dass $A = \{x : |x| = n/2\} = (B_n)_{n/2}$ die einzige maximale Antikette ist. Für ungerade n sind $(B_n)_{\lfloor n/2 \rfloor}$ und $(B_n)_{\lceil n/2 \rceil}$ die einzigen maximalen Antiketten (Aufgabe 20).

3. *Beweis (Skizze).* Sei $A := B_n$ und $k < n/2$. Wir konstruieren einen expliziten Monomorphismus $f : A_k \rightarrow A_{k+1}$. Zur Anschauung sei $n = 21$ und $x = \{3, 4, 5, 8, 12, 13, 17, 19, 20\}$. Wir schreiben x als Folge $(a_1, \dots, a_n) \in \{+, -\}^n$ mit $a_i = + \iff i \in x$. Also

$$x = - - + + + - - + - - - + + - - - + - + + -.$$

Nun ersetzen wir Paare der Form $+-$ durch $**$:

$$- - + + ** - ** - - + ** - - ** + **.$$

Wenn wir uns die Paare $**$ wegdenken, können wir erneut $+-$ durch $**$ ersetzen und den Prozess solange wiederholen bis keine $+-$ mehr auftauchen:

$$- - * * * * * * * - * * * * - * * + * *.$$

In jedem Schritt werden genauso viele $+$ wie $-$ entfernt. Wegen $k < n/2$ waren zu Beginn mehr $-$ als $+$ vorhanden. Am Ende müssen also immer noch $-$ vorkommen. Sei a die Position des letzten Minus (im Beispiel $a = 16$). Wir definieren $f(x) := x \cup \{a\} \in A_{k+1}$. Man kann zeigen, dass f ein Monomorphismus ist. □

5 Operationen auf der booleschen Algebra

Definition 5.1. Eine *Operation* einer Gruppe G auf einer Menge Ω ist eine Abbildung $G \times \Omega \rightarrow \Omega$, $(g, \omega) \mapsto {}^g\omega$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\forall \omega \in \Omega : {}^1\omega = \omega$,
- $\forall g, h \in G \forall \omega \in \Omega : {}^g({}^h\omega) = {}^{gh}\omega$.

Für $\omega \in \Omega$ nennt man $G_\omega := \{g \in G\}$ die *Bahn* von ω und $G_\omega := \{g \in G : {}^g\omega = \omega\}$ den *Stabilisator* von ω in G . Man nennt $|G_\omega|$ die *Länge* der Bahn. Die Menge aller Bahnen sei Ω/G . Existiert nur eine Bahn, so heißt die Operation *transitiv*.

Bemerkung 5.2.

- (i) Bekanntlich liefert jede Operation von G auf Ω einen Homomorphismus in die symmetrische Gruppe $f : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$, $f(g)(\omega) = {}^g\omega$. Umgekehrt entspricht jeder Homomorphismus $G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ einer Operation.
- (ii) Bekanntlich definiert

$$\alpha \sim \beta \iff \exists g \in G : {}^g\alpha = \beta$$

eine Äquivalenzrelation auf Ω . Die Äquivalenzklassen sind die Bahnen. Insbesondere ist Ω die disjunkte Vereinigung der Bahnen (die Bahnen bilden also eine *Partition* von Ω).

- (iii) Offenbar sind Stabilisatoren G_ω Untergruppen von G (aber nicht unbedingt Normalteiler). Die Menge der Linksnebenklassen sei G/G_ω .

Beispiel 5.3.

- (i) Sei $\Omega = \{1, \dots, n\}$ und $S_n := \text{Sym}(\Omega)$. Jede Untergruppe $G \leq S_n$ operiert auf Ω durch $g\omega := g(\omega)$ für $\omega \in \Omega$. Der entsprechende Homomorphismus ist die Inklusionsabbildung $G \rightarrow S_n$.
- (ii) Wie in (i) operieren $G = \langle (1, 2), (3, 4) \rangle = \{1, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\}$ und

$$H = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle = \{1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$$

auf $\{1, 2, 3, 4\}$. Die Bahnen von G sind $\{1, 2\}$ und $\{3, 4\}$, während H transitiv ist. Trotzdem ist $G \cong H$.

- (iii) Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auf \mathbb{R}^2 durch Drehung um den Ursprung. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dabei

$$\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall erhält man sogar einen Homomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R}) \leq \text{Sym}(\mathbb{R}^2)$. Die Bahnen sind Kreise um den Ursprung, wobei auch $\{(0, 0)\}$ als Kreis betrachtet wird.

- (iv) Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auch durch Translation auf \mathbb{R}^2 . Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei dabei $\alpha(x, y) := (x + \alpha, y)$. Die Bahnen sind die horizontalen Linien.

Satz 5.4 (Bahn-Stabilisator-Satz). *Für jede Operation von G auf einer Menge Ω gilt*

$$\boxed{|G_\omega| = |G : G_\omega|}$$

für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung $F : G/G_\omega \rightarrow G_\omega, xG_\omega \mapsto x\omega$ eine Bijektion ist. Wegen

$$xG_\omega = yG_\omega \iff y^{-1}x \in G_\omega \iff y^{-1}x\omega = \omega \iff x\omega = y\omega$$

für $x, y \in G$ ist F wohldefiniert und injektiv. Die Surjektivität folgt aus der Definition der Bahn. \square

Bemerkung 5.5.

- (i) Aus dem Satz von Lagrange folgt, dass die Bahnlängen stets Teiler der Gruppenordnung sind, falls $|G| < \infty$.
- (ii) Ist Δ ein Repräsentantensystem für die Bahnen von G auf Ω , so erhält man die *Bahngleichung*

$$\boxed{|\Omega| = \sum_{\delta \in \Delta} |G_\delta| = \sum_{\delta \in \Delta} |G : G_\delta|.$$

- (iii) Sei $|G| = 77$ und $|\Omega| = 23$. Nach der Bahngleichung existieren $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ mit $23 = a + 7b + 11c$. Es folgt $a > 0$, d. h. G hat stets einen Fixpunkt auf Ω .

Beispiel 5.6. Die Operation von S_n auf $\{1, \dots, n\}$ setzt sich zu einer Operation auf der booleschen Algebra B_n fort durch

$${}^g\{a_1, \dots, a_k\} := \{g(a_1), \dots, g(a_k)\} \quad (g \in S_n, \{a_1, \dots, a_k\} \in B_n).$$

Dabei gilt $x \subseteq y \iff {}^g x \subseteq {}^g y$. Jedes $g \in S_n$ induziert somit einen *Automorphismus* auf der geordneten Menge B_n (also einen Isomorphismus $B_n \rightarrow B_n$). Dies liefert einen Homomorphismus $F : S_n \rightarrow \text{Aut}(B_n)$. Nach Aufgabe 24 ist F sogar ein Isomorphismus.

Mit S_n operiert auch jede Untergruppe $G \leq S_n$ auf B_n . Für $g \in S_n$ und $x \in B_n$ gilt sicher auch $|{}^g x| = |x|$. Daher liegt jede Bahn von G in einem $(B_n)_k$. Für $n = 3$ und $G = \langle (1, 2) \rangle = S_2$ erhält man die sechs Bahnen $\{\emptyset\}$, $\{\{1\}, \{2\}\}$, $\{\{3\}\}$, $\{\{1, 2\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$.

Definition 5.7. Sei $G \leq S_n$. Wir definieren eine Ordnungsrelation auf B_n/G durch

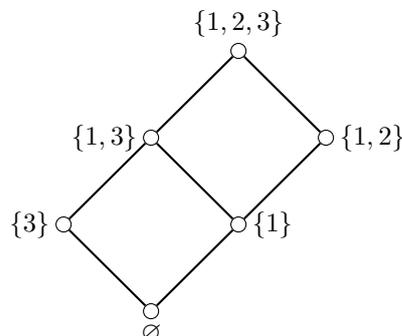
$$X \leq Y :\iff \exists x \in X, y \in Y : x \subseteq y.$$

Man nennt B_n/G (*geordnete*) *Quotientenmenge*.

Bemerkung 5.8. Sei $x \in X \in B_n/G$ und $y \in Y \in B_n/G$ mit $x \subseteq y$. Für jedes $x' \in X$ existiert ein $g \in G$ mit ${}^g x = x'$. Dies zeigt $x' \subseteq {}^g y =: y' \in Y$. Andererseits existiert für jedes $y' \in Y$ ein $g \in G$ mit ${}^g y = y'$ und es folgt $x' := {}^g x \subseteq y'$. Somit sieht man leicht, dass \leq reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

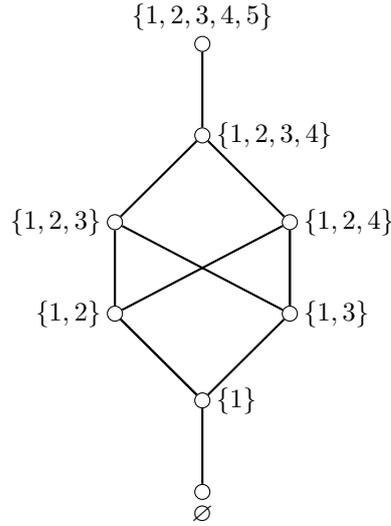
Beispiel 5.9.

(i) Sei $n = 3$ und $G = S_2 \leq S_3$. Das Hasse-Diagramm von B_n/G ist dann



wobei für jede Bahn nur ein Repräsentant gelistet ist.

(ii) Für $n = 5$ und $G = \langle (1, 2, 3, 4, 5) \rangle$ erhält man



Lemma 5.10. Für alle $G \leq S_n$ ist B_n/G graduiert vom Rang n und Rang-symmetrisch.

Beweis. Jede maximale Kette $x_0 < \dots < x_n$ in B_n liefert eine maximale Kette ${}^G x_0 < {}^G x_1 < \dots < {}^G x_n$ von B_n/G und umgekehrt. Daher ist B_n/G graduiert vom Rang n . Für $x \in (B_n)_k$ ist $\bar{x} := \{1, \dots, n\} \setminus x \in (B_n)_{n-k}$. Gilt ${}^g x = y$ für ein $g \in G$, so auch ${}^g \bar{x} = \bar{y}$. Daher induziert die Abbildung $x \rightarrow \bar{x}$ eine Bijektion zwischen $(B_n/G)_k$ und $(B_n/G)_{n-k}$. Insbesondere ist $|(B_n/G)_k| = |(B_n/G)_{n-k}|$, d. h. B_n/G ist Rang-symmetrisch. \square

Bemerkung 5.11. Jede Permutation $g \in S_n$ induziert eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}(B_n)_k \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_k$, $x \mapsto g(x)$ für $x \in (B_n)_k$, die wir ebenfalls mit g bezeichnen werden. Für $G \leq S_n$ sei

$$\mathbb{R}(B_n)_k^G := \{v \in \mathbb{R}(B_n)_k : \forall g \in G : g(v) = v\}.$$

Offenbar ist $\mathbb{R}(B_n)_k^G$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}(B_n)_k$.

Lemma 5.12. Die Bahnensummen

$$v_X := \sum_{x \in X} x,$$

für $X \in (B_n)_k/G$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}(B_n)_k^G$.

Beweis. Für $X \in (B_n)_k/G$ und $g \in G$ gilt

$$g(v_X) = \sum_{x \in X} g(x) = \sum_{y \in g(X)} y = v_X \in \mathbb{R}(B_n)_k^G.$$

Offenbar sind die Bahnensummen linear unabhängig, denn jedes der Basiselemente $x \in (B_n)_k$ tritt in genau einer Bahnensumme auf.

Sei nun $v = \sum_{x \in (B_n)_k} a_x x \in \mathbb{R}(B_n)_k^G$ mit $a_x \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $g \in G$ gilt

$$\sum_{x \in (B_n)_k} a_x x = v = g(v) = \sum_{x \in (B_n)_k} a_x g(x).$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt $a_{g(x)} = a_x$ für alle $x \in (B_n)_k$ und $g \in G$. Daher sind die a_x konstant auf den Bahnen von G und es folgt $v = \sum_{X \in (B_n)_k/G} a_x v_X$ mit $x \in X$. Also bilden die v_X auch ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}(B_n)_k^G$. \square

Bemerkung 5.13. Wir benutzen nun die linearen Abbildungen $f_k : \mathbb{R}(B_n)_k \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_{k+1}$, $x \mapsto \sum_{|y|=k+1, x \subseteq y} y$ (für $x \in (B_n)_k$) aus Lemma 4.17.

Lemma 5.14. Für $v \in \mathbb{R}(B_n)_k^G$ gilt $f_k(v) \in \mathbb{R}(B_n)_{k+1}^G$.

Beweis. O. B. d. A. sei $v = v_X$ mit $X \in (B_n)_k/G$. Für $g \in G$ gilt dann

$$\begin{aligned} g(f_k(v)) &= g\left(f_k\left(\sum_{x \in X} x\right)\right) = g\left(\sum_{x \in X} \sum_{\substack{|y|=k+1 \\ x \subseteq y}} y\right) = \sum_{x \in X} \sum_{\substack{|y|=k+1 \\ x \subseteq y}} g(y) \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{\substack{|z|=k+1 \\ g(x) \subseteq z}} z = \sum_{x \in X} f_k(g(x)) = f_k(g(v)) = f_k(v) \in \mathbb{R}(B_n)_{k+1}^G. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 5.15. Für alle $G \leq S_n$ ist B_n/G Rang-unimodal und erfüllt die Sperner-Eigenschaft.

Beweis. Sei $A := B_n/G$. Es gilt dann $A_k = (B_n)_k/G$. Für $X \in A_k$ sei

$$f_k(v_X) \stackrel{5.14}{=} \sum_{Y \in A_{k+1}} \alpha_{XY} v_Y$$

mit $\alpha_{XY} \in \mathbb{R}$. Wir definieren $\hat{f}_k : \mathbb{R}A_k \rightarrow \mathbb{R}A_{k+1}$ durch $\hat{f}_k(X) = \sum_{Y \in A_{k+1}} \alpha_{XY} Y$. Wir wenden Lemma 4.16 auf \hat{f}_k an. Im Fall $\alpha_{XY} \neq 0$ existieren $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x \subseteq y$. Es gilt also $X \leq Y$ in A . Es verbleibt zu zeigen, dass \hat{f}_k für $k < n/2$ (bzw. $k \geq n/2$) injektiv (bzw. surjektiv) ist. Nach Lemma 4.17 ist f_k injektiv (für $k < n/2$) und daher auch die Einschränkung $(f_k)_{\mathbb{R}(B_n)_k^G}$. Die Abbildungen $(f_k)_{\mathbb{R}(B_n)_k^G}$ und \hat{f}_k unterscheiden sich aber nur durch den Isomorphismus $\mathbb{R}A_k \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_k^G$, $X \mapsto v_X$. Daher ist auch \hat{f}_k injektiv.

Sei nun $k \geq n/2$. Wie im Beweis von Lemma 4.17 existieren Abbildungen $g_k : \mathbb{R}(B_n)_k \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_{k-1}$ mit

$$f_k \circ g_{k+1} = g_{k+2} \circ f_{k+1} + (2k + 2 - n) \text{id}.$$

Wie dort gezeigt ist $f_k \circ g_{k+1}$ invertierbar und daher auch die Einschränkung $(f_k \circ g_{k+1})_{\mathbb{R}(B_n)_{k+1}^G}$. Somit sind $(f_k)_{\mathbb{R}(B_n)_k^G}$ und \hat{f}_k surjektiv. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.16 und Lemma 4.14. \square

Bemerkung (Wiederholung Diskrete Mathematik). Seien $G_1 := (E_1, K_1)$ und $G_2 := (E_2, K_2)$ einfache Graphen. Eine Bijektion $f : E_1 \rightarrow E_2$ heißt *Isomorphismus*, falls $\{x, y\} \in K_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in K_2$ für alle $x, y \in E_1$ gilt (d. h. $f(K_1) = K_2$). Gegebenenfalls nennt man G_1 und G_2 *isomorph* und schreibt $G_1 \cong G_2$.

Satz 5.16. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n := \binom{m}{2}$. Sei ρ_k die Anzahl der einfachen Graphen mit m Ecken und k Kanten bis auf Isomorphie. Dann gilt

(i) $\rho_k = \rho_{n-k}$ für $k = 0, \dots, n$ und

$$1 = \rho_0 \leq \dots \leq \rho_{\lfloor n/2 \rfloor} = \rho_{\lceil n/2 \rceil} \geq \dots \geq \rho_n = 1.$$

(ii) Ist T eine Menge von Graphen mit m Ecken, sodass kein Graph aus T zu einem Teilgraph eines anderen Graphen aus T isomorph ist. Dann gilt $|T| \leq \rho_{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Beweis. Sei $M = \{1, \dots, m\}$ und $\Omega = \binom{M}{2}$ ($|\Omega| = n$). Sicher sind B_n und B_Ω als geordnete Mengen isomorph (einen Isomorphismus erhält man, indem man die Elemente $\binom{M}{2}$ durchnummeriert). Jedes $K \in B_\Omega$ entspricht einem einfachen Graphen $\Gamma = (M, K)$ (Ecken $x, y \in M$ sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $\{x, y\} \in K$ gilt). Sei G das Bild des kanonischen Homomorphismus $f : S_m \cong \text{Sym}(M) \rightarrow \text{Sym}(\Omega) \cong S_n$ (für $g \in \text{Sym}(M)$ und $\{x, y\} \in \Omega$ sei $g\{x, y\} = \{g(x), g(y)\}$). Zwei Graphen Γ_1 und Γ_2 sind genau dann isomorph, wenn sie als Elemente von B_Ω in der gleichen Bahn unter G liegen. Insbesondere ist B_Ω/G die Menge der Isomorphieklassen von einfachen Graphen mit m Ecken. Außerdem ist $\rho_k = |(B_\Omega/G)_k|$. Nach Lemma 5.10 ist $\rho_k = \rho_{n-k}$ (das ist auch klar, wenn man die komplementären Graphen betrachtet). Die Ungleichungskette für ρ_k folgt, da B_n/G Rang-unimodal bzgl. $n/2$ ist nach Satz 5.15. Die Menge T in (ii) ist eine Antikette in B_Ω . Daher folgt letzte Aussage aus der Sperner-Eigenschaft. \square

Bemerkung 5.17. Man kennt keinen Beweis von Satz 5.16, der ohne Algebra auskommt.

Beispiel 5.18. Das Hasse-Diagramm für B_Ω/G mit $m = 4$ ist (Bild).

Bemerkung 5.19.

- (i) Sei Γ ein Graph mit Ecken e_1, \dots, e_m ($m \geq 3$). Sei Γ_i der Graph, der aus Γ entsteht, indem man e_i und alle anliegenden Kanten (die e_i enthalten) entfernt. Es ist ein offenes Problem, ob man Γ (bis auf Isomorphie) aus der Multimenge $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$ rekonstruieren kann. Dabei sind Γ_i abstrakte Graphen, sodass man keinen Rückschluss hat, welche Ecke entfernt wurde.
- (ii) Sind t_1, \dots, t_k die Kanten von Γ , so kann man analog Γ_i konstruieren, indem man t_i aus Γ entfernt. Es ist ebenfalls ein offenes Problem, ob man Γ aus m und der Multimenge $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ rekonstruieren kann. Man muss hierbei m explizit vorgeben, denn falls Γ keine Kanten hat, gibt es keine Γ_i .
- (iii) Ist Γ im obigen Sinn *Ecken-rekonstruierbar*, so auch *Kanten-rekonstruierbar* (ohne Beweis).

Satz 5.20. Sei Γ ein einfacher Graph mit m Ecken und $k > \frac{1}{2} \binom{m}{2}$ Kanten. Dann ist Γ *Kanten-rekonstruierbar*.

Beweis. Wie in Satz 5.16 betrachten wir die Menge $(B_n)_k$ aller Graphen mit Eckenmenge $\{1, \dots, m\}$ und k Kanten. Wegen $k > \frac{1}{2} \binom{m}{2}$ ist

$$f_{k-1} \circ g_k = g_{k+1} \circ f_k + \underbrace{(2k - n)}_{>0} \text{id}$$

invertierbar. Insbesondere ist $g_k : \mathbb{R}(B_n)_k \rightarrow \mathbb{R}(B_n)_{k-1}$ injektiv. Daher ist auch die Einschränkung $(g_k)_{\mathbb{R}(B_n)_k^G}$ injektiv. Wie in Satz 5.15 entspricht $(g_k)_{\mathbb{R}(B_n)_k^G}$ der Abbildung $\hat{g}_k : \mathbb{R}((B_n)_k/G) \rightarrow \mathbb{R}((B_n)_{k-1}/G)$ mit

$$\hat{g}_k(X) = \sum_{\substack{Y \in (B_n)_{k-1}/G \\ Y \leq X}} Y$$

für $X \in (B_n)_k/G$. Sei nun $\Gamma \in X$ und $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ wie in Bemerkung 5.19. Dann existieren $Y_1, \dots, Y_k \in (B_n)_{k-1}/G$ mit $\Gamma_i \in Y_i \leq X$ für $i = 1, \dots, k$. Außerdem ist $\hat{g}_k(X) = Y_{i_1} + \dots + Y_{i_l}$ mit $\{Y_1, \dots, Y_k\} = \{Y_{i_1}, \dots, Y_{i_l}\}$. Da \hat{g}_k injektiv ist, lässt sich Γ sogar aus der Menge $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ rekonstruierbar (ohne die Vielfachheiten zu kennen). \square

Definition 5.21. Eine reelle Zahlenfolge (a_0, \dots, a_n) heißt *log-konkav*, falls $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$ gilt. Die Folge heißt *stark log-konkav*, falls

$$b_i^2 \geq b_{i-1}b_{i+1}$$

für $b_i := a_i / \binom{n}{i}$ und $i = 1, \dots, n-1$ gilt.

Bemerkung 5.22.

(i) Ist (a_0, \dots, a_n) log-konkav, so gilt

$$\log a_i \geq \frac{\log(a_{i-1}) + \log(a_{i+1})}{2}$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Die Folge $(\log(a_1), \dots, \log(a_n))$ ist also konkav (Bild).

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} b_i^2 \geq b_{i-1}b_{i+1} &\iff \\ a_i^2 \binom{n}{i-1} \binom{n}{i+1} &\geq a_{i-1}a_{i+1} \binom{n}{i}^2 \iff \\ \frac{a_i^2}{(i-1)!(i+1)!(n-i+1)!(n-i-1)!} &\geq \frac{a_{i-1}a_{i+1}}{(i!)^2((n-i)!)^2} \iff \\ a_i^2 &\geq \frac{i+1}{i} \frac{n-i+1}{n-i} a_{i-1}a_{i+1} \geq a_{i-1}a_{i+1}. \end{aligned}$$

Daher ist jede stark log-konkave Folge auch log-konkav.

(iii) Die Folge $(1, 0, 0, 1)$ zeigt, dass nicht jede log-konkave Folge unimodal ist. Wir zeigen aber, dass es nur wenige Ausnahmen gibt. Dafür nennen wir $a_i = 0$ eine *innere Null* von (a_0, \dots, a_n) , falls $j < i < k$ mit $a_j \neq 0 \neq a_k$ existieren.

Lemma 5.23. Jede log-konkave Folge $a = (a_0, \dots, a_n)$ nicht-negativer reeller Zahlen ohne innere Nullen ist unimodal.

Beweis. Ist a nicht unimodal, so existieren $0 \leq i < j \leq n$ mit $a_{i-1} > a_i \leq a_{i+1} \leq a_j > 0$. Da a keine inneren Nullen besitzt, ist $a_{i+1} > 0$ und man hat den Widerspruch $a_i^2 < a_{i-1}a_{i+1}$. \square

Satz 5.24 (Newton). Sei

$$\alpha(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$$

mit lauter reellen Nullstellen. Dann ist die Folge (b_0, \dots, b_n) stark log-konkav (d. h. (a_0, \dots, a_n) ist log-konkav). Sind alle $b_i \geq 0$, so besitzt (b_0, \dots, b_n) keine inneren Nullen und ist daher unimodal.

Beweis. Für $n \leq 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 2$. Sei $d := \deg \alpha \leq n$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt α genau d (reelle) Nullstellen mit Vielfachheiten. Ist x_0 eine Nullstelle mit Vielfachheit m , so gilt $\alpha(x) = (x - x_0)^m \beta(x)$, wobei $\beta(x_0) \neq 0$. Die Produktregel zeigt, dass x_0 eine $(m-1)$ -fache Nullstelle der Ableitung α' ist. Sind $x_0 < x_1$ Nullstellen von α , so existiert nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle y von α' mit $x_0 < y < x_1$. Daher hat α' mindestens $d-1$ reelle Nullstellen. Wegen $\deg \alpha' = d-1$ hat α' genau $d-1$ (reelle) Nullstellen.

Wir extrahieren nun die Koeffizienten a_{k-1} , a_k und a_{k+1} , indem wir „von oben“ und „von unten“ ableiten. Sei $\beta(x) = \alpha^{(k-1)}(x)$ die $(k-1)$ -te Ableitung von α . Dann hat β Grad $\leq n-k+1$ und lauter reelle Nullstellen. Außerdem ist $\gamma(x) = x^{n-k+1}\beta(1/x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n-k+1$. Die von Null verschiedenen Nullstellen von γ haben die Form $1/x_0$ mit $\beta(x_0) = 0$. Sie sind also ebenfalls alle reell. Schließlich ist $\delta(x) = \gamma^{(n-k-1)}(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens 2. Wie oben hat auch δ nur reelle Nullstellen. Es gilt

$$\begin{aligned}\beta(x) &= b_{k-1}(k-1)! + b_k k! x + b_{k+1} \frac{(k+1)!}{2} x^2 + \dots \\ \gamma(x) &= b_{k-1}(k-1)! x^{n-k+1} + b_k k! x^{n-k} + b_{k+1} \frac{(k+1)!}{2} x^{n-k-1} + \dots \\ \delta(x) &= b_{k-1}(k-1)! \frac{(n-k+1)!}{2} x^2 + b_k k! (n-k)! x + b_{k+1} \frac{(k+1)!}{2} (n-k-1)! \\ &= \frac{n!}{2} (a_{k-1} x^2 + 2a_k x + a_{k+1}).\end{aligned}$$

Im Fall $a_{k-1} = 0$ ist sicher $a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1}$. Anderenfalls ist δ ein quadratisches Polynom mit zwei reellen Nullstellen. Die p - q -Formel für quadratische Gleichungen zeigt $\frac{a_k^2}{a_{k-1}} - \frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} \geq 0$. Daher ist $a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1}$ und (a_0, \dots, a_n) ist log-konkav.

Sei nun $a_k \geq 0$ für $k = 0, \dots, n$. Nehmen wir an, dass innere Nullen existieren. Seien $0 \leq i < j \leq n$ mit $j-i > 1$ und $a_i > 0 < a_j$ und $a_{i+1} = \dots = a_{j-1} = 0$. Wie oben konstruieren wir

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \alpha^{(i)}(x) = c_i + c_j x^{j-i} + \dots + c_n x^{n-i} \\ \gamma(x) &= x^{n-i} \beta(1/x) = c_i x^{n-i} + c_j x^{n-j} + \dots + c_n \\ \delta(x) &= \gamma^{(n-j)}(x) = d x^{j-i} + e\end{aligned}$$

mit $d, e > 0$. Nun hat auch δ lauter reelle Nullstellen. Wegen $j-i \geq 2$ existiert aber ein $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $x_0^{j-i} = -e/d$. Dieser Widerspruch zeigt, dass keine inneren Nullen existieren. Nach Lemma 5.23 ist (a_0, \dots, a_n) unimodal. \square

Beispiel 5.25. Das charakteristische Polynom α einer symmetrischen reellen Matrix hat lauter reelle Nullstellen. Daher sind die Koeffizienten von α stark log-konkav.

6 Young-Diagramme und q -Binomialkoeffizienten

Definition 6.1. Eine *Partition* von $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Folge $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ und $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = n$. Sicher sind dabei nur endlich viele λ_i von Null verschieden. Jedes $\lambda_i > 0$ ist ein *Teil* von λ . Wir lassen die $\lambda_i = 0$ oft weg und schreiben zum Beispiel

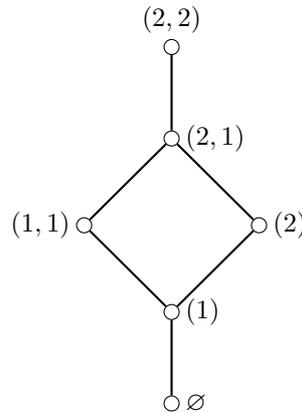
$$(5, 2, 2, 1, 0, \dots) = (5, 2, 2, 1) = (5, 2^2, 1).$$

Ist λ eine Partition von n , so schreiben wir $\lambda \vdash n$.

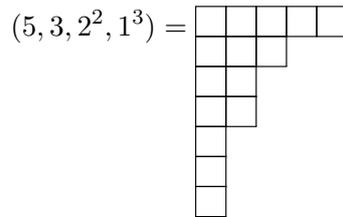
Beispiel 6.2. Es gibt sieben Partitionen von 5: (5) , $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1^2)$, $(2^2, 1)$, $(2, 1^3)$ und (1^5) .

Definition 6.3. Sei $L(m, n)$ die (endliche) Menge aller Partitionen mit höchstens m Teilen und jedem Teil $\leq n$. Für beliebige Partitionen $\lambda = (\lambda_1, \dots)$ und $\mu = (\mu_1, \dots)$ sei $\lambda \leq \mu$, falls $\lambda_i \leq \mu_i$ für $i = 1, \dots$. Dies ist offenbar eine Ordnungsrelation.

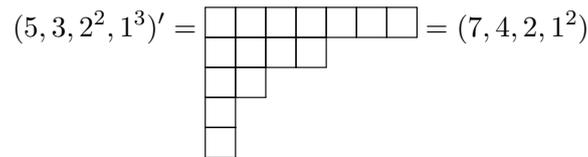
Beispiel 6.4. Das Hasse-Diagramm von $L(2, 2)$ bzgl. \leq ist



Bemerkung 6.5. Das *Young-Diagramm* einer Partition $\lambda = (\lambda_1, \dots)$ von n ist eine Anordnung von n Boxen mit λ_i Boxen in der i -ten Zeile:



Die Relation $\lambda \leq \mu$ bedeutet, dass das Young-Diagramm von λ im Young-Diagramm von μ enthalten ist. Die Menge $L(m, n)$ besteht genau aus Partitionen, deren Young-Diagramm in ein $m \times n$ -Rechteck passt. Durch Spiegelung an der Diagonalen erhält man das Young-Diagramm der *konjugierten* Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \dots)$ von n . Zum Beispiel:



Im Allgemeinen gilt $\lambda'_i = |\{j : \lambda_j \geq i\}|$ für $i = 1, \dots$. Außerdem ist $\lambda'' = \lambda$. Man sieht leicht, dass die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda'$ ist ein Isomorphismus zwischen den geordneten Mengen $L(m, n)$ und $L(n, m)$ ist.

Satz 6.6. Die geordnete Menge $L(m, n)$ ist graduiert vom Rang mn und Rang-symmetrisch. Der Rang einer Partition $\lambda \in L(m, n)$ ist $|\lambda|$.

Beweis. Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots) \in L(m, n)$ mit $|\lambda| = \sum \lambda_i < nm$. Dann existiert ein $i \leq m$ mit $\lambda_i < n$. Sei i dabei so klein wie möglich. Dann ist $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \dots) \in L(m, n)$ und $\lambda < \mu$. Ist andererseits $|\lambda| > 0$, so existiert sicher ein $\mu \in L(m, n)$ mit $\mu < \lambda$. Dies zeigt, dass $|\lambda|$ der Rang von λ ist und dass alle maximalen Ketten die Länge nm haben. Also ist $L(m, n)$ graduiert vom Rang mn .

Sei $\lambda \in L(m, n)$ mit Young-Diagramm Y . Wir betrachten das Komplement \bar{Y} von Y im $m \times n$ -Rechteck (Bild...). Indem man \bar{Y} um 180° dreht, erhält man ein Young-Diagramm einer Partition $\bar{\lambda} \in L(m, n)$ mit $|\lambda| + |\bar{\lambda}| = mn$. Die Abbildung $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ ist sicher eine Bijektion zwischen $L(m, n)_k = \{\lambda \in L(m, n) : |\lambda| = k\}$ und $L(m, n)_{nm-k}$. Daher ist $L(m, n)$ Rang-symmetrisch. \square

Satz 6.7. Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $|L(m, n)| = \binom{m+n}{m}$.

Beweis. Für $\lambda \in L(m, n)$ mit Young-Diagramm Y definieren wir eine Folge (a_1, \dots, a_{m+n}) mit $a_i \in \{N, O\}$ (N steht für „Norden“ und O für „Osten“). Wir betten Y wie bisher in das $m \times n$ -Rechtecken ein und wandern entlang des äußeren Rands von Y beginnend links unten. Jeder Schritt um eine Box geht entweder nach Norden oder Osten. Für $\lambda = (4, 3, 1^2) \in L(5, 6)$ erhält man beispielsweise $(a_1, \dots, a_{11}) = (N, O, N, N, O, O, N, O, N, O, O)$ (Bild. . .). Offenbar ist die Abbildung $\lambda \mapsto (a_1, \dots, a_{m+n})$ eine Bijektion zwischen $L(m, n)$ und der Menge A aller Folgen mit $|\{i : a_i = N\}| = m$. Dies zeigt $|L(m, n)| = |A| = \binom{m+n}{m}$. \square

Definition 6.8. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und q eine freie Variable (eine Unbekannte). Definiere

$$[n]_q := \sum_{i=0}^{n-1} q^i.$$

Man nennt $n!_q := [1]_q \dots [n]_q$ die q -Fakultät von n und

$$\binom{n}{k}_q := \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q} = \frac{[n]_q \dots [n-k+1]_q}{[k]_q \dots [1]_q}$$

einen q -Binomialkoeffizienten (oder Gaußschen Binomialkoeffizienten), wobei $0 \leq k \leq n$. Für $k < 0$ oder $k > n$ setzen wir zusätzlich $\binom{n}{k}_q = 0$.

Bemerkung 6.9. Für $q = 1$ erhält man $[n]_1 = n$, $n!_1 = n!$ und $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$. Man sieht leicht

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q &= \binom{n}{n-k}_q, \\ \binom{n}{0}_q &= \binom{n}{n}_q = 1, \\ \binom{n}{1}_q &= \binom{n}{n-1}_q = [n]_q, \\ \binom{4}{2}_q &= \frac{(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)}{1+q} = 1+q+2q^2+q^3+q^4, \\ \binom{5}{2}_q &= 1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6. \end{aligned}$$

Das folgende Lemma zeigt, dass $\binom{n}{k}_q$ stets ein Polynom in q mit nicht-negativen Koeffizienten ist (Induktion nach n).

Lemma 6.10. Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k-1}_q + q^k \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}_q + q^{n+1-k} \binom{n}{k-1}_q.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$[k]_q + q^k [n-k+1]_q = \sum_{i=0}^{k-1} q^i + q^k \sum_{i=0}^{n-k} q^i = \sum_{i=0}^n q^i = [n+1]_q. \quad (6.1)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1}_q + q^k \binom{n}{k}_q &= \frac{n!_q}{(k-1)!_q (n-k+1)!_q} + \frac{q^k n!_q}{k!_q (n-k)!_q} \\ &= \frac{n!_q ([k]_q + q^k [n-k+1]_q)}{k!_q (n-k+1)!_q} \stackrel{(6.1)}{=} \frac{n!_q [n+1]_q}{k!_q (n-k+1)!_q} \\ &= \frac{(n+1)!_q}{k!_q (n+1-k)!_q} = \binom{n+1}{k}_q. \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 6.9 ergibt sich

$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n+1}{n+1-k}_q = \binom{n}{n-k}_q + q^{n+1-k} \binom{n}{n+1-k}_q = \binom{n}{k}_q + q^{n+1-k} \binom{n}{k-1}_q. \quad \square$$

Bemerkung 6.11. Für $q = 1$ erhält man die bekannte Beziehung aus dem Pascalschen Dreieck.

Satz 6.12. Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |L(m, n)_k| q^k = \binom{m+n}{m}_q.$$

Beweis. Induktion nach $m+n$. Sei $P(m, n) := \sum_{k=0}^{\infty} |L(m, n)_k| q^k$. Für $m = 0$ ist $P(0, n) = q^0 = 1 = \binom{0+n}{0}_q$. Sei nun $m \geq 1$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots) \in L(m, n)_k$. Ist $\lambda_1 < n$, so gilt $\lambda \in L(m, n-1)_k$. Im Fall $\lambda_1 = n$ ist $(\lambda_2, \dots) \in L(m-1, n)_{k-n}$. Umgekehrt ist sicher $L(m, n-1)_k \subseteq L(m, n)_k$ und $(n, \mu_1, \dots) \in L(m, n)_k$ für alle $\mu \in L(m-1, n)_{k-n}$. Dies zeigt

$$|L(m, n)_k| = |L(m, n-1)_k| + |L(m-1, n)_{k-n}|$$

und es folgt

$$P(m, n) = P(m, n-1) + q^n P(m-1, n).$$

Durch Induktion erhält man $P(m, n) = \binom{m+n}{m}_q$ aus Lemma 6.10. □

Bemerkung 6.13. Für $q = 1$ erhält man $|L(m, n)| = \binom{m+n}{m}$, also Satz 6.7.

Definition 6.14. Sei $R = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ die Menge aller Boxen des $m \times n$ -Rechtecks. Das Young-Diagramm einer Partition $\lambda \in L(m, n)$ lässt sich als Teilmenge von R auffassen. Sei $G \subseteq \text{Sym}(R)$ die Menge aller Permutationen, die die Zeilen von R als Mengen permutieren. Für $m = 3, n = 4$ zum Beispiel

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{g} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 6 & 7 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 9 & 11 & 10 & 12 \\ \hline \end{array}$$

Es gibt $n!$ Möglichkeiten die Elemente einer Zeile zu vertauschen. Zusätzlich gibt es $m!$ Möglichkeiten die Zeilen selbst zu permutieren. Daher ist $|G| = (n!)^m m!$. Man sieht leicht, dass G eine Untergruppe von $\text{Sym}(R)$ ist. Man nennt G das *Kranzprodukt* von S_n und S_m und schreibt $G = S_n \wr S_m$ (siehe Diskrete Mathematik). Wie üblich operiert G auf der booleschen Algebra B_R .

Lemma 6.15. Jede Bahn von G auf B_R enthält genau ein Young-Diagramm.

Beweis. Sei $x \in B_R$ mit x_i Boxen in Zeile i . Die Operation von G erlaubt es, die Zeilen von x zu permutieren ohne die Bahn zu verlassen. Wir können daher $x_1 \geq \dots \geq x_m$ annehmen. Schließlich kann man die Boxen in jeder Zeile so anordnen, dass die „linksbündig“ ausgerichtet sind. Dann ist x das Young-Diagramm der Partition (x_1, \dots, x_m) . Da sich die Multimenge $\{x_1, \dots, x_m\}$ unter der Operation von G nicht ändern, kann kein weiteres Young-Diagramm in der Bahn von x liegen. \square

Satz 6.16. Die geordnete Menge $L(m, n)$ ist zur Quotientenmenge B_R/G isomorph.

Beweis. Nach Definition 6.14 induziert jede Partition $\lambda \in L(m, n)$ ein Element aus B_R und damit auch eine Bahn $f(\lambda) \in B_R/G$. Nach Lemma 6.15 ist die Abbildung $f : L(m, n) \rightarrow B_R/G$ eine Bijektion. Gilt $\lambda \leq \mu$, so ist das Young-Diagramm von λ in dem Young-Diagramm von μ enthalten. Es folgt dann $f(\lambda) \leq f(\mu)$ (Definition 5.7). Nach Aufgabe 17 ist f ein Isomorphismus. \square

Folgerung 6.17. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist $L(m, n)$ Rang-symmetrisch, Rang-unimodal und erfüllt die Sperner-Eigenschaft.

Beweis. Folgt aus Satz 5.16. \square

Bemerkung 6.18. Man kennt keinen expliziten Monomorphismus $L(m, n)_k \rightarrow L(m, n)_{k+1}$ für $k < mn/2$ (vgl. Aufgabe 33).

Definition 6.19. Für $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ sei

$$f_k(S, \alpha) := \left| \left\{ T \in \binom{S}{k} : \sum_{t \in T} t = \alpha \right\} \right|.$$

Wir interessieren uns für folgende Extremwertaufgabe

$$h_k(n) := \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ S \subseteq \mathbb{R}_+ \\ |S|=n}} f_k(S, \alpha)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 6.20. Es gilt

$$f_3(\{1, 3, 4, 6, 7\}, 11) = 2,$$

denn $1 + 3 + 7 = 1 + 4 + 6 = 11$.

Bemerkung 6.21. Liegen die Zahlen in S zu weit auseinander, so wird $f_k(S, \alpha)$ in der Regel nicht groß. Für $S = \{1, 2, 4, \dots, 2^n\}$ gilt beispielsweise $f_k(S, \alpha) \leq 1$, denn jede ganze Zahl besitzt eine eindeutige Binärdarstellung. Das gleiche gilt, wenn die Zahlen aus S linear unabhängig über \mathbb{Q} sind (z. B. $S = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi\}$).

Satz 6.22. Für alle $S \in \binom{\mathbb{R}_+}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_k(S, \alpha) \leq f_k(\{1, \dots, n\}, \lfloor k(n+1)/2 \rfloor).$$

Insbesondere ist $h_k(n)$ der Koeffizient von $q^{\lfloor k(n-k)/2 \rfloor}$ in $\binom{n}{k}_q$.

Beweis. Sei $N := \{1, \dots, n\}$ und $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in \binom{N}{k}$ mit $1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq n$ und $t_1 + \dots + t_k = \alpha$. Für $\lambda_i := t_i - i$ gilt dann

$$0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq n - k, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = \alpha - \sum_{i=0}^k i = \alpha - \binom{k+1}{2}.$$

Umgekehrt kann man aus den λ_i die t_i rekonstruieren. Daher ist $T \mapsto \lambda(T) = (\lambda_k, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_1)$ eine Bijektion und es folgt $f_k(N, \alpha) = |L(k, n-k)_{\alpha - \binom{k+1}{2}}|$. Nach Folgerung 6.17 wird dieser Wert maximal für

$$\alpha = \lfloor k(n-k)/2 \rfloor + \binom{k+1}{2} = \lfloor k(n+1)/2 \rfloor.$$

Also ist

$$f_k(N, \lfloor k(n+1)/2 \rfloor) \leq h_k(n).$$

Sei nun $S = \{s_1, \dots, s_n\} \in \binom{\mathbb{R}^+}{n}$ mit $s_1 < \dots < s_n$ beliebig. Seien $T, U \in \binom{S}{k}$ mit $\sum_{t \in T} t = \sum_{u \in U} u = \alpha$. Dann existieren $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ sowie $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ mit $T = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}\}$ und $U = \{s_{j_1}, \dots, s_{j_k}\}$. Wir betrachten $T' := \{i_1, \dots, i_k\} \in \binom{N}{k}$ und $U' := \{j_1, \dots, j_k\} \in \binom{N}{k}$. Im Fall $\lambda(T') \leq \lambda(U')$ gilt $i_l = \lambda_l(T') + l \leq \lambda_l(U') + l = j_l$ für $l = 1, \dots, k$. Wegen $s_1 < \dots < s_n$ folgt

$$\sum_{t \in T} t = \sum_{l=1}^k s_{i_l} \leq \sum_{l=1}^k s_{j_l} = \sum_{u \in U} u = \sum_{t \in T} t.$$

Dies zeigt $T = U$. Daher ist

$$\{\lambda(T) : T \in \binom{S}{k}, \sum_{t \in T} t = \alpha\}$$

eine Antikette in $L(k, n-k)$. Aus der Sperner-Eigenschaft von $L(k, n-k)$ folgt nun

$$h_k(n) \leq |L(k, n-k)_{\lfloor k(n-k)/2 \rfloor}| = f_k(N, \lfloor k(n+1)/2 \rfloor) \leq h_k(n).$$

Die zweite Aussage folgt aus Satz 6.12. □

Bemerkung 6.23. Wir lassen nun den Parameter k weg, d. h.

$$f(S, \alpha) := |\{T \subseteq S : \sum_{t \in T} t = \alpha\}|,$$

$$h(n) := \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ S \subseteq \mathbb{R}^+ \\ |S|=n}} f(S, \alpha).$$

Beispiel 6.24. Für $S = \{1, 2, 3\}$ ist $f(S, 3) = 2$, denn $1 + 2 = 3$. Man sieht leicht $h(3) = 2$.

Definition 6.25. Sei $M(n) = 2^{\{1, \dots, n\}}$. Jedes Element aus $M(n)$ lässt sich als Partition mit paarweise verschiedenen Teilen auffassen (also in der Form (a_1, \dots, a_k) mit $a_1 > \dots > a_k$). Die Ordnungsrelation von Partitionen lässt sich daher auf $M(n)$ einschränken (also $(a_1, \dots, a_k) \leq (b_1, \dots, b_l)$ falls $k \leq l$ und $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, k$).

Bemerkung 6.26.

- (i) Leider hat $M(n)$ nicht die Form B_m/G . Zum Nachweis der Sperner-Eigenschaft müssen wir daher anders argumentieren. Für $a = (a_1, \dots, a_k) \in M(n)$ gilt offenbar

$$a > (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1) > \dots > (a_1, \dots, a_{k-1}) > (a_1, \dots, a_{k-1} - 1) > \dots > \emptyset.$$

Daher ist $a_1 + \dots + a_k$ der Rang von a . Insbesondere ist $M(n)$ graduiert vom Rang $1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$. Außerdem ist

$$F(M(n), q) := \sum_{i=0}^{\binom{n+1}{2}} |M(n)_i| q^i = (1+q)(1+q^2) \dots (1+q^n)$$

(man multipliziere die rechte Seite aus und fasse gleiche Potenzen zusammen). Die Transformation

$$q^{\binom{n+1}{2}} F(M(n), 1/q) = q(1+q^{-1})q^2(1+q^{-2}) \dots q^n(1+q^{-n}) = F(M(n), q)$$

zeigt, dass $M(n)$ Rang-symmetrisch ist.

- (ii) Ist $a = (a_1, \dots, a_l) \in M(n)_k$ und $b = (b_1, \dots, b_m) \in M(n)_{k-1}$ mit $b < a$, so existiert genau ein s mit $a_s = b_s + 1$ (für $t \neq s$ gilt dann $a_t = b_t$). Im Fall $a_s = a_l = 1$ setzen wir hierbei $b_s = 0$. Wir definieren

$$c_{ba} := \begin{cases} \binom{n+1}{2} & \text{falls } b_s = 0, \\ (n - b_s)(n + a_s) & \text{falls } b_s > 0. \end{cases}$$

- (iii) Wir definieren lineare Abbildungen $f_k : \mathbb{R}M(n)_k \rightarrow \mathbb{R}M(n)_{k+1}$ und $g_k : \mathbb{R}M(n)_k \rightarrow \mathbb{R}M(n)_{k-1}$ durch

$$f_k(x) := \sum_{\substack{y \in M(n)_{k+1} \\ y > x}} y,$$

$$g_k(x) := \sum_{\substack{y \in M(n)_{k-1} \\ y < x}} c_{yx} y.$$

für $x \in M(n)_k$.

Lemma 6.27. Für $k = 2, \dots, \binom{n+1}{2} - 1$ gilt

$$g_{k+1}f_k - f_{k-1}g_k = \left(\binom{n+1}{2} - 2k \right) \text{id}.$$

Beweis. Für $x \in M(n)_k$ gilt

$$g_{k+1}f_k(x) - f_{k-1}g_k(x) = \sum_{y>x} \sum_{z<y} c_{zy} z - \sum_{y<x} c_{yx} \sum_{z>y} z.$$

Ein Element $z \in M(n)_k \setminus \{x\}$ tritt in beiden Summen höchstens einmal auf. Gegebenenfalls gilt $x = (x_1, \dots, x_l)$, $y = (x_1, \dots, x_s + 1, \dots, x_l)$ und $z = (x_1, \dots, x_s + 1, \dots, x_t - 1, \dots, x_l)$ in der ersten Summe und analog in der zweiten Summe. Die Koeffizienten c_{zy} und c_{yx} in der ersten und zweiten

Summe stimmen dann überein (sie sind $(n - x_t - 1)(n + x_t)$ bzw. $\binom{n+1}{2}$). Der Fall $z = x$ tritt für jedes y auf. Der entsprechende Koeffizient ist

$$\begin{aligned}
\sum_{y>x} c_{xy} - \sum_{y<x} c_{yx} &= (n - x_1)(n + x_1 + 1) + \sum_{\substack{2 \leq s \leq l \\ x_{s-1} > x_s + 1}} (n - x_s)(n + x_s + 1) \\
&- \sum_{\substack{2 \leq s \leq l \\ x_{s-1} > x_s + 1}} (n - x_{s-1} + 1)(n + x_{s-1}) + \begin{cases} \binom{n+1}{2} - (n - x_l + 1)(n + x_l) & \text{falls } x_l > 1 \\ -\binom{n+1}{2} & \text{falls } x_l = 1 \end{cases} \\
&= \sum_{s=1}^l (n - x_s)(n + x_s + 1) - \sum_{s=1}^{l-1} (n - x_s + 1)(n + x_s) \\
&+ \begin{cases} \binom{n+1}{2} - (n - x_l + 1)(n + x_l) & \text{falls } x_l > 1 \\ -\binom{n+1}{2} & \text{falls } x_l = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -2 \sum_{s=1}^l x_s + \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{2} - 2k & \text{falls } x_l > 1 \\ -2 \sum_{s=1}^{l-1} x_s + (n - 1)(n + 2) - \binom{n+1}{2} = -2k + n^2 + n - \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{2} - 2k & \text{falls } x_l = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Lemma 6.28. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann gilt

$$x^n \det(x1_m - AB) = x^m \det(x1_n - BA).$$

Insbesondere haben AB und BA die gleichen von Null verschiedenen Eigenwerte.

Beweis.

$$\begin{aligned}
x^n \det(x1_m - AB) &= \begin{vmatrix} 1_m & 0 \\ -B & x1_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1_m - AB & A \\ 0 & 1_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1_m & 0 \\ B & 1_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1_m & 0 \\ -B & x1_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1_m & A \\ B & 1_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x1_m & A \\ 0 & x1_n - BA \end{vmatrix} = x^m \det(x1_n - BA). \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 6.29. Für $k < \frac{1}{2} \binom{n+1}{2}$ ist f_k injektiv und für $k \geq \frac{1}{2} \binom{n+1}{2}$ ist f_k surjektiv.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion nach $k < \frac{1}{2} \binom{n+1}{2}$, dass $g_{k+1}f_k$ positive reelle Eigenwerte hat. Für $k = 0$ ist $M(n)_0 = \{\emptyset\}$ und $g_1f_0(\emptyset) = g_1(\{1\}) = \binom{n+1}{2}\emptyset$. Sei nun $k > 0$ und die Behauptung für $k - 1$ bereits bewiesen. Nach Lemma 6.28 hat dann $f_{k-1}g_k$ nicht-negative Eigenwerte. Nach Lemma 6.27 sind die Eigenwerte von $g_{k+1}f_k$ positiv, denn $\binom{n+1}{2} - 2k > 0$. Insbesondere ist $g_{k+1}f_k$ invertierbar und f_k ist injektiv. Analog zeigt man die Behauptung für $k \geq \frac{1}{2} \binom{n+1}{2}$ (vgl. Lemma 4.17). \square

Satz 6.30. Die geordnete Menge $M(n)$ ist Rang-symmetrisch, Rang-unimodal und besitzt die Sperner-Eigenschaft.

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Lemmas 6.29, 4.16 und 4.14. \square

Bemerkung 6.31. Aus Satz 6.30 folgt, dass die Koeffizienten von $(1 + q) \dots (1 + q^n) = F(M(n), q)$ unimodal sind. Dafür kennt man bislang keinen kombinatorischen Beweis (ohne Algebra).

Satz 6.32 (Schwache Erdős-Moser-Vermutung). Für $S \subseteq \binom{\mathbb{R}^+}{n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(S, \alpha) \leq f\left(\{1, \dots, n\}, \left\lfloor \frac{1}{2} \binom{n+1}{2} \right\rfloor\right) = h(n).$$

Beweis. Sei $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ mit $0 < s_1 < \dots < s_n$. Seien $T, U \subseteq S$ mit $\sum_{t \in T} t = \sum_{u \in U} u = \alpha$. Wie in Satz 6.22 sei $T' := \{i_1, \dots, i_k\}$ und $U' := \{j_1, \dots, j_l\}$ mit $T = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}\}$ und $U = \{s_{j_1}, \dots, s_{j_l}\}$. Im Fall $T' \leq U'$ (in $M(n)$) ist

$$\sum_{t \in T} t = s_{i_1} + \dots + s_{i_k} \leq s_{j_1} + \dots + s_{j_l} = \sum_{u \in U} u = \sum_{t \in T} t$$

und es folgt $T = U$. Daher ist

$$\left\{ T \subseteq S : \sum_{t \in T} t = \alpha \right\}$$

eine Antikette in $M(n)$. Aus Satz 6.30 folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 6.33. Die (allgemeine) Erdős-Moser-Vermutung behandelt Teilmengen $S \subseteq \mathbb{R}$ anstatt $S \subseteq \mathbb{R}^+$. Dies ist schwieriger, denn zum Beispiel ist $f(\{-1, 0, 1\}, 0) = 4$ mit $\sum_{\emptyset} = 0 = 1 - 1 = 1 - 1 + 0$ (im Gegensatz zu $h(3) = 2$). Die Vermutung besagt

$$f(S, \alpha) \leq f(\{-n, -n+1, \dots, n\}, 0)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $S \subseteq \mathbb{R}$ mit $|S| = 2n + 1$. Sie wurde ebenfalls bewiesen.

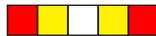
7 Pólya-Theorie

Bemerkung 7.1. Wie wollen nun genaue Formeln finden für die Anzahl $|A_n|$ der Elemente eines Levels einer geordneten Menge A .

Beispiel 7.2. Wir betrachten fünf horizontal angeordnete Boxen, die man mit je n Farben ausmalen kann:



Offenbar gibt es dafür n^5 Möglichkeiten. Liegt ein solcher 5er Block aus Papier vor, so kann man ihn um 180° drehen. Zwei Blöcke, die aus so einer solchen Drehung hervorgehen, wollen wir nicht unterscheiden. Naiverweise reduziert sich nun die Anzahl der Möglichkeiten auf $n^5/2$. Dies kann aber nicht stimmen, denn $n^5/2$ ist keine ganze Zahl, falls n ungerade ist. Manche Blöcke sind symmetrisch und ändern sich durch Drehung nicht:



Die Anzahl der symmetrischen Blöcke ist offenbar n^3 (man kann nur die ersten drei Boxen beliebig färben). Die Gesamtzahl aller Blöcke ist daher $n^3 + \frac{n^5 - n^3}{2} = \frac{1}{2}(n^5 + n^3)$.

Definition 7.3. Sei X eine endliche Menge und $G \leq \text{Sym}(X)$. Sei C eine beliebige Menge (von „Farben“). Eine Färbung von X ist eine Abbildung $f : X \rightarrow C$. Zwei Färbungen $f, f' : X \rightarrow C$ heißen äquivalent, falls ein $\pi \in G$ mit

$$f(x) = f'(\pi(x))$$

für alle $x \in X$ existiert. Wir schreiben dann $f \sim f'$. Dies definiert offenbar eine Äquivalenzrelation auf $C^X := \{X \rightarrow C\}$. Die Äquivalenzklassen sind die Bahnen der Operation von G auf C^X durch $(\pi f)(x) := f(\pi^{-1}(x))$ (nachrechnen).

Beispiel 7.4. Sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$ als Quadrat angeordnet:

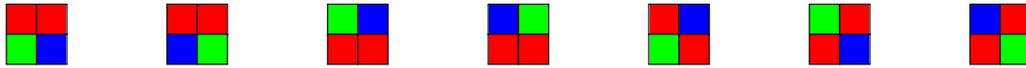
1	2
3	4

Sei $C = \{r, g, b\}$ (rot, grün, blau). Wir zählen nur die Färbungen f mit $f(X) = \{r, r, g, b\}$ als Multimenge.

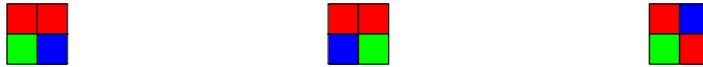
- (i) Für $G = 1$ sind Färbungen genau dann äquivalent, wenn sie gleich sind. Es gibt $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten die beiden roten Boxen zu wählen und jeweils noch zwei Möglichkeiten die beiden verbleibenden Boxen zu färben. Insgesamt gibt es also 12 solche Färbungen.
- (ii) Für $G = \langle (1, 2)(3, 4) \rangle$ sind Färbungen äquivalent, wenn sie gleich sind oder durch eine Spiegelung an der y -Achse ineinander übergehen. Da es hier keine symmetrischen Färbungen gibt, reduziert sich die Anzahl auf $\frac{12}{2} = 6$:



- (iii) Für $G = \langle (2, 3) \rangle$ (Spiegelung an der Hauptdiagonale) gibt es zwei symmetrische Färbungen. Insgesamt also $2 + \frac{12-2}{2} = 7$:



- (iv) Für $G = \langle (1, 2, 4, 3) \rangle$ (Drehung um 90°) gibt es keine symmetrischen Färbungen. Insgesamt also $\frac{12}{4} = 3$:



- (v) Für $G = \langle (1, 2, 4, 3), (2, 3) \rangle \cong D_8$ (Symmetriegruppe des Quadrats) verbleiben nur noch zwei nicht-äquivalente Färbungen:



- (vi) Für $G = \text{Sym}(X) \cong S_4$ gibt es offensichtlich nur noch eine Färbung. Im Allgemeinen sind Färbungen $f, g : X \rightarrow C$ genau dann äquivalent unter $\text{Sym}(X)$, wenn die Multimengen $f(X)$ und $g(X)$ übereinstimmen.

Bemerkung 7.5.

- (i) Sei $X = \{1, \dots, 4\}$, $C = \{r, g, b\}$ und $G = D_8$ wie in Beispiel 7.4. Sei c_{ijk} die Anzahl der nicht-äquivalenten Färbungen mit genau i -mal rot, j -mal grün und k -mal blau (also $c_{2,1,1} = 2$). Wir betrachten die erzeugende Funktion

$$F_G(r, g, b) := \sum_{i+j+k=4} c_{ijk} r^i g^j b^k$$

in den unabhängigen Variablen r , g und b . Man zeigt leicht

$$F_G(r, g, b) = (r^4 + g^4 + b^4) + (r^3g + r^3b + rg^3 + g^3b + rb^3 + gb^3) + 2(r^2g^2 + r^2b^2 + g^2b^2) + 2(r^2gb + rg^2b + rgb^2).$$

Setzt man $r = g = b = 1$, so erhält man die Anzahl aller nicht-äquivalenten Färbungen: $3 + 6 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 21$. Setzt man $r = g = 1$, so kann man zählen wie viele Färbungen genau 0, 1, 2 oder 3 blaue Boxen haben.

(ii) Sei nun allgemeiner $C = \{r_1, \dots, r_n\}$ (z. B. Schattierungen von rot) und

$$F_G(r_1, \dots, r_n) := \sum_{1 \leq i \leq n} r_i^4 + \sum_{i \neq j} r_i^3 r_j + 2 \sum_{i < j} r_i^2 r_j^2 + 2 \sum_{\substack{j \neq i \neq k \\ j < k}} r_i^2 r_j r_k + 3 \sum_{i < j < k < l} r_i r_j r_k r_l.$$

Setzt man $r_1 = \dots = r_n = 1$, so erhält man wieder die Anzahl aller Färbungen (mit n Farben):

$$F_G(1, \dots, 1) = n + n(n-1) + 2 \binom{n}{2} + 2n \binom{n-1}{2} + 3 \binom{n}{4} = \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n).$$

Man beobachtet: $8 = |G|$ und der Koeffizient von n^k ist die Anzahl der Elemente in G mit genau k Zyklen. Die folgenden Sätze zeigen, dass dies kein Zufall ist.

Satz 7.6 (BURNSIDES Lemma). *Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge Ω operiert. Für $g \in G$ sei $\text{fix}(g) := |\{\omega \in \Omega : g \in G_\omega\}|$ die Anzahl der Fixpunkte von g auf Ω . Dann ist*

$$\boxed{|\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{fix}(g)}$$

die Anzahl der Bahnen von G auf Ω .

Beweis. Liegen $\alpha, \beta \in \Omega$ in der gleichen Bahn, so gilt $|G : G_\alpha| = |G_\alpha| = |G_\beta| = |G : G_\beta|$ nach dem Bahn-Stabilisator-Satz. Aus dem Satz von Lagrange folgt $|G_\alpha| = |G_\beta|$ (beachte: $|G| < \infty$). Sei $\Delta \subseteq \Omega$ ein Repräsentantensystem für Ω/G . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \text{fix}(g) &= |\{(g, \omega) \in G \times \Omega : g\omega = \omega\}| = \sum_{\omega \in \Omega} |G_\omega| = \sum_{\delta \in \Delta} |G_\delta| |G_\delta| \\ &= \sum_{\delta \in \Delta} |G : G_\delta| |G_\delta| = \sum_{\delta \in \Delta} |G| = |\Delta| |G| = |\Omega/G| |G|. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 7.7. *Seien X, C endliche Mengen und $G \leq \text{Sym}(X)$. Für $g \in G$ sei c_g die Anzahl der Zyklen von g (inkl. Einerzyklen). Dann ist*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C|^{c_g}$$

die Anzahl der nicht-äquivalenten Färbungen $X \rightarrow C$.

Beweis. Zwei Färbungen sind genau dann äquivalent, wenn sie in der gleichen Bahn unter der Operation von G auf $\Omega := C^X$ liegen. Wir zählen diese Bahnen mit Burnsidess Lemma. Eine Färbung $f : X \rightarrow C$ ist genau dann invariant unter $g \in G$ (d. h. $g f = f$), wenn f konstant auf den Zyklen von g ist. Die Anzahl der Fixpunkte von g ist daher $|C|^{c_g}$. Die Behauptung folgt. □

Definition 7.8. Für $\pi \in \text{Sym}(X)$ sei t_i die Anzahl der Zyklen von π der Länge i . Man nennt $t(\pi) = (t_1, \dots, t_n)$ den *Typ* von π ($n = |X|$). Sicher ist t_1 die Anzahl der Fixpunkte von π und $\sum_{i=1}^n i t_i = n$. Der *Zyklusindikator* von π ist das Monom $Z_\pi := z_1^{t_1} \dots z_n^{t_n}$ in den Unbekannten z_1, \dots, z_n . Für $G \leq \text{Sym}(X)$ ist

$$Z_G := Z_G(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Z_g \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]$$

der *Zyklusindikator* von G .

Beispiel 7.9. Für $G := \langle (1, 2, 3, 4) \rangle \leq S_4$ gilt $Z_G = \frac{1}{4}(z_1^4 + z_2^2 + 2z_4)$ und für $G = D_8 \leq S_4$ erhält man $Z_G = \frac{1}{8}(z_1^4 + 3z_2^2 + 2z_1^2 z_2 + 2z_4)$.

Satz 7.10 (PÓLYA). Sei X eine endliche Menge und $G \leq \text{Sym}(X)$. Sei $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ eine Menge von Farben. Sei $\alpha(i_1, i_2, \dots)$ die Anzahl der nicht-äquivalenten Färbungen $f : X \rightarrow C$, wobei c_k genau i_k -mal benutzt wird (also $i_k = |\{x \in X : f(x) = c_k\}|$). Sei

$$F_G(c_1, c_2, \dots) := \sum_{i_1, i_2, \dots \geq 0} \alpha(i_1, \dots) c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots$$

(als Polynom oder Potenzreihe, je nach dem ob C endlich ist). Dann ist

$$F_G(c_1, c_2, \dots) = Z_G\left(\sum_{i \geq 1} c_i, \sum_{i \geq 1} c_i^2, \dots\right).$$

Beweis. Wir fixieren einen Multiindex $i = (i_1, i_2, \dots)$ mit $i_1, i_2, \dots \geq 0$ und $i_1 + i_2 + \dots = |X|$ (nur endlich viele der i_j können von 0 verschieden sein). Sei

$$F_i := \{f : X \rightarrow C : \forall j \in \mathbb{N}_0 : |\{x \in X : f(x) = c_j\}| = i_j\}.$$

Für $f \in F_i$ und $\pi \in G$ ist auch $f \circ \pi \in F_i$, d. h. äquivalente Färbungen liegen in der gleichen Menge F_i . Daher ist $\alpha(i) = |F_i/G|$. Wir wenden Burnside's Lemma auf die Operation von G auf F_i an. Sei $f \in F_i$ ein Fixpunkt von $\pi \in G$. Wie in Satz 7.7 ist f konstant auf den Zyklen von π . Betrachte

$$H_\pi := \prod_{j \geq 1} (c_1^j + c_2^j + \dots)^{t_j},$$

wobei $t(\pi) = (t_1, \dots)$. Wir zählen wie oft $c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots$ auftritt, wenn man das Produkt ausmultipliziert. Jeder Faktor liefert einen Term c_k^j . Wir interpretieren dies als Färbung der j Elemente $x \in X$ eines j -Zyklus von π mit der Farbe c_k (also $f(x) = c_k$). Da jede j -Potenz genau t_j -mal in H_π auftritt, lässt sich jeder der t_j Zyklen der Länge j mit einer Farbe färben. Damit das Produkt aller gewählten Terme c_k^j insgesamt $c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots$ ergibt, muss man i_k Elemente $x \in X$ mit Farbe c_k färben. Wegen $i_1 + i_2 + \dots = |X|$ sind am Ende alle $f(x)$ festgelegt. Der Koeffizient von $c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots$ in H_π ist daher genau die Anzahl $\text{fix}_i(\pi)$ der Fixpunkte von π auf F_i , d. h.

$$H_\pi = \sum_i \text{fix}_i(\pi) c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots$$

Summieren über G liefert mit Burnside's Lemma

$$\begin{aligned} F_G(c_1, c_2, \dots) &= \sum_i \alpha(i_1, i_2, \dots) c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots = \sum_i |F_i/G| c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots = \frac{1}{|G|} \sum_i \sum_{\pi \in G} \text{fix}_i(\pi) c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} H_\pi = Z_G\left(\sum_{j \geq 1} c_j, \sum_{j \geq 0} c_j^2 \dots\right). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 7.11. Wir zählen Halsketten bestehend aus l gefärbten Perlen ($|X| = l$). Zwei Halsketten betrachten wir als gleich, wenn sie durch eine Drehung ineinander übergehen (man stelle sich die Halsketten kreisförmig angeordnet vor). Hier ist also $G = \langle g \rangle \leq \text{Sym}(X)$ die zyklische Gruppe der Ordnung l . Sicher ist g ein l -Zyklus. Für $m \in \mathbb{N}$ entspricht g^m einer Drehung um $360^\circ m/l$. Die Ordnung von g^m ist bekanntlich $\frac{l}{\text{ggT}(l, m)}$. Da g^m keine Fixpunkte hat (außer im Fall $g^m = 1$), ist g^m also ein Produkt von $\text{ggT}(l, m)$ Zyklen der Länge $\frac{l}{\text{ggT}(l, m)}$. Für alle $d \mid l$ gilt

$$|\{1 \leq m \leq l : \text{ggT}(l, m) = d\}| = |\{1 \leq m' \leq l/d : \text{ggT}(m', l/d) = 1\}| = \varphi(l/d)$$

mit der eulerschen φ -Funktion. Dies zeigt

$$Z_G(z_1, \dots, z_l) = \frac{1}{l} \sum_{d|l} \varphi(l/d) z_{l/d}^d = \frac{1}{l} \sum_{d|l} \varphi(d) z_d^{l/d}.$$

Satz 7.12. Die Anzahl der Halsketten aus l Perlen in n möglichen Farben ist

$$\frac{1}{l} \sum_{d|l} \varphi(d) n^{l/d}.$$

Genauer gilt

$$F_G(c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{1}{l} \sum_{d|l} \varphi(d) (c_1^d + c_2^d + \dots + c_n^d)^{l/d}.$$

Beweis. Die zweite Formel folgt aus Satz 7.10 und die erste erhält man durch die Substitution $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$. \square

Beispiel 7.13. Wie viele Halsketten mit sechs Perlen in den Farben rot, grün, blau und weiß gibt es, wenn mindestens drei rote Perlen verwendet werden sollen? Man berechnet (mit Computer)

$$\begin{aligned} F_G(r, 1, 1, 1) &= \frac{1}{6} \left((r+3)^6 + (r^2+3)^3 + 2(r^3+3)^2 + 2(r^6+3) \right) \\ &= r^6 + 3r^5 + 24r^4 + 92r^3 + 207r^2 + 243r + 130. \end{aligned}$$

Antwort: $92 + 24 + 3 + 1 = 120$.

Bemerkung 7.14.

- (i) Man erhält aus Satz 7.12 auch die bekannte Formel $\sum_{d|l} \varphi(d) = l$, denn es gibt nur eine Halskette in einer Farbe.
- (ii) Realistischerweise müsste man Halsketten auch als gleich auffassen, wenn sie durch Spiegelung (realisiert durch Drehung im Raum) ineinander überführt werden können. In diesem Fall operiert die Diedergruppe $G = D_{2l}$ der Ordnung $2l$. Bekanntlich besteht G aus l Drehungen und l Spiegelungen. Ist l ungerade, so hat jede Spiegelung genau einen Fixpunkt und $\frac{l-1}{2}$ Zyklen der Länge 2. Ist l gerade, so gibt es $\frac{l}{2}$ Spiegelungen ohne Fixpunkte und $\frac{l}{2}$ Spiegelungen mit genau zwei Fixpunkten. Man erhält

$$Z_G(z_1, \dots, z_l) = \begin{cases} \frac{1}{2l} \left(\sum_{d|l} \varphi(d) z_d^{l/d} + l z_1 z_2^{(l-1)/2} \right) & \text{falls } l \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2l} \left(\sum_{d|l} \varphi(d) z_d^{l/d} + \frac{l}{2} z_2^{l/2} + \frac{l}{2} z_1^2 z_2^{(l-2)/2} \right) & \text{falls } l \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beispiel 7.15. Wir zählen nun nicht-äquivalente Färbungen $X \rightarrow C = \{c_1, c_2, \dots\}$ unter der vollen symmetrischen Gruppe $\text{Sym}(X) \cong S_l$ ($|X| = l$). Offenbar gibt es für jeden Multiindex (i_1, i_2, \dots) mit $\sum i_j = l$ nur eine Färbung f mit $|\{x \in X : f(x) = c_j\}| = i_j$ für $j \geq 0$. Also ist

$$F_{S_l}(c_1, c_2, \dots) = \sum_{i_1+i_2+\dots=l} c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots$$

und

$$\sum_{l \geq 0} F_{S_l}(c_1, c_2, \dots) x^l = \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{j \geq 0} c_k^j x^j \right) = \frac{1}{(1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \dots}.$$

Sei $f_l(n) := F_{S_l}(1, \dots, 1)$ die Anzahl aller nicht-äquivalenten Färbungen mit n Farben. Dann gilt

$$\sum_{l \geq 0} f_l(n) x^l = \frac{1}{(1-x)^n} \stackrel{\text{Aufgabe 1}}{=} \sum_{l \geq 0} \binom{n+l-1}{l} x^l.$$

Also ist $f_l(n) = \binom{n+l-1}{l}$. Dies kann man auch „zu Fuß“ zeigen: Die Gleichung $i_1 + \dots + i_n = l$ lässt sich durch l Punkte visualisieren, die durch $n-1$ Striche unterteilt werden in je i_j Punkte:

$$(0, 0, 1, 3, 2, 4) \longleftrightarrow | | \cdot | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Auf der rechten Seite stehen insgesamt $l+n-1$ Symbol, von denen $n-1$ ausgewählt werden. Die Anzahl der Möglichkeiten ist daher $\binom{l+n-1}{n-1} = \binom{n+l-1}{l}$ wie behauptet. Aus Satz 7.7 folgt nun

$$\frac{1}{l!} \sum_{g \in S_l} n^{c_g} = \binom{n+l-1}{l} = \frac{(n+l-1)(n+l-2) \dots n}{l!}.$$

Ist $s_{l,k}$ die Anzahl der Permutationen $\pi \in S_l$ mit genau k Zyklen (*Stirling-Zahl erster Art*, siehe Diskrete Mathematik), so folgt

$$\sum_{k=1}^l s_{l,k} x^k = (x+l-1)(x+l-2) \dots x.$$

Für $l=4$ erhält man $(x+3)(x+2)(x+1)x = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$. Es gibt also 11 Permutation in S_4 mit genau zwei Zyklen, nämlich $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 4, 2)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 4, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 3)$, $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 3)(2, 4)$ und $(1, 4)(2, 3)$.

Satz 7.16. Die Anzahl der Permutationen von S_l mit Typ (t_1, \dots, t_l) ist

$$\frac{l!}{\prod_{k=1}^l k^{t_k} t_k!}.$$

Dies ist auch der Koeffizient von $z_1^{t_1} \dots z_l^{t_l}$ in $l! Z_{S_l}(z_1, \dots, z_l)$.

Beweis. Sei P_t die Menge der Permutation in S_l mit Typ $t = (t_1, \dots, t_l)$. Wir konstruieren P_t wie folgt: Man schreibe die Zahlen von 1 bis l in beliebiger Reihenfolge ($l!$ Möglichkeiten) und klammere die ersten t_1 Zahlen in 1-Zyklen, die nächsten $2t_2$ Zahlen in 2-Zyklen usw. Dies liefert offenbar ein Element aus P_t und es bleibt zu zeigen wie oft jedes $\pi \in P_t$ auf diese Weise konstruiert wird. Die Zyklen gleicher Länge kann man untereinander permutieren ohne die Permutation zu verändern. Dies liefert $t_1! t_2! \dots t_l!$ Möglichkeiten. Zusätzlich kann man jeden k -Zyklus auf k Weisen schreiben:

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_2, a_3, \dots, a_k, a_1) = \dots = (a_k, a_1, \dots, a_{k-1}).$$

Jedes Element in P_t wird daher genau $\prod_{k=1}^l k^{t_k} t_k!$ Mal konstruiert. Die Behauptung folgt. \square

Satz 7.17. Es gilt

$$\sum_{l \geq 0} Z_{S_l}(z_1, \dots, z_l) x^l = \exp\left(\sum_{j \geq 1} \frac{z_j}{j} x^j\right).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{j \geq 1} \frac{z_j}{j} x^j\right) &= e^{z_1 x} e^{\frac{z_2}{2} x^2} \dots = \left(\sum_{j \geq 0} \frac{z_1^j x^j}{j!}\right) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{z_2^j x^{2j}}{2^j j!}\right) \dots \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_l \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots + lj_l = l}} \left(\frac{l!}{j_1! 2^{j_2} j_2! \dots l^{j_l} j_l!} z_1^{j_1} \dots z_l^{j_l}\right) x^l \stackrel{7.16}{=} \sum_{l \geq 0} Z_{S_l}(z_1, \dots, z_l) x^l. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 7.18. Setzt man $z_1 = \dots = z_l = n$, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 0} f_l(n)x^l &= \sum_{l \geq 0} F_{S_l}(1, \dots, 1)x^l \stackrel{7.10}{=} \sum_{l \geq 0} Z_{S_l}(n, \dots, n)x^l \\ &\stackrel{7.17}{=} \exp\left(n\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right)\right) = \exp(-n \log(1-x)) = \frac{1}{(1-x)^n}. \end{aligned}$$

Dies bestätigt Beispiel 7.15.

Lemma 7.19. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k,$$

wobei $\binom{c}{k} := \frac{c(c-1)\dots(c-k+1)}{k!}$ für $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. O. B. d. A. sei $x \neq 0$. Wegen

$$\frac{\left|\binom{1/2}{k+1}x^{k+1}\right|}{\left|\binom{1/2}{k}x^k\right|} = \frac{(k - \frac{1}{2})|x|^{k+1}}{(k+1)|x|^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |x| < 1$$

konvergiert die Reihe absolut (Quotientenkriterium). Nach der Cauchy-Produkt-Formel (Analysis 1) und der Vandermonde-Identität (Diskrete Mathematik Satz 3.3) gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{1/2}{k} \binom{1/2}{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} x^n = 1+x.$$

Daher ist

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = \pm \sqrt{1+x}.$$

Wegen $f(x)^2 = 1+x > 0$ ist $f(x) \neq 0$. Außerdem ist $f(0) = 1 > 0$. Da $f(x)$ auf dem Intervall $(-1, 1)$ stetig ist, gilt $f(x) > 0$ für alle x . Dies zeigt $f(x) = \sqrt{1+x}$. \square

Bemerkung 7.20. Analog zeigt man

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k$$

für $|x| < 1$. Allgemeiner gilt die *Newtonsche Binomialformel*

$$(x+y)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^{a-n} y^n$$

für $a \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x| > |y|$ (ohne Beweis).

Satz 7.21. Die Anzahl der Permutationen von S_n mit ungerader Ordnung ist

$$o(n) = \begin{cases} 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (n-1)^2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (n-2)^2 \cdot n & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Eine Permutation $\pi \in S_n$ hat genau dann ungerade Ordnung, wenn alle Zyklen von π ungerade Länge haben (die Ordnung ist das kgV der Zyklenlängen). Wir setzen daher $z_i = 1$ bzw. 0 in Satz 7.17 je nachdem, ob i ungerade oder gerade ist. Es gilt dann $o(n) = n!Z_{S_n}(z_i \in \{0, 1\})$ und

$$\sum_{n \geq 0} \frac{o(n)}{n!} x^n = \exp\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

Wegen $-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ ist

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{1}{2} \left(-\log(1-x) + \log(1+x) \right)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{o(n)}{n!} x^n &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = (1+x)(1-x^2)^{-1/2} \stackrel{7.20}{=} (1+x) \sum_{k \geq 0} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-1/2}{k} (x^{2k} + x^{2k+1}). \end{aligned}$$

Nach Definition des Binomialkoeffizienten ist

$$\begin{aligned} o(2k) &= (2k)! (-1)^k \binom{-1/2}{k} = \frac{(2k)!}{k!} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \\ &= 1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2 \end{aligned}$$

und $o(2k+1) = (2k+1)! (-1)^k \binom{-1/2}{k} = 1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2 \cdot (2k+1)$. □

Satz 7.22. Sei X eine n -elementige Menge, $G \leq \text{Sym}(X)$ und B_X die boolesche Algebra. Dann gilt

$$\sum_{k \geq 0} |(B_X/G)_k| q^k = Z_G(1+q, 1+q^2, \dots, 1+q^n).$$

Beweis. Jedes Element $A \in B_X$ ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ und kann daher als Färbung $f_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ aufgefasst werden, wobei $f(x) = 1 \iff x \in A$. Zwei Elemente in B_X liegen genau dann in der gleichen Bahn unter G , wenn die entsprechenden Färbungen äquivalent sind. Sei $\alpha(i_0, i_1)$ die Anzahl der nicht-äquivalenten Färbungen mit $i_j = |\{x \in X : f(x) = j\}|$ für $j = 0, 1$. Dann ist $|(B_X/G)_k| = \alpha(n-k, k)$. Nach Pólyas Satz gilt

$$\sum_{i_0, i_1 \geq 0} \alpha(i_0, i_1) x^{i_0} y^{i_1} = Z_G(x+y, x^2+y^2, \dots).$$

Die Behauptung folgt, indem man $x = 1$ und $y = q$ setzt. □

Folgerung 7.23. Für jede n -elementige Menge X und $G \leq \text{Sym}(X)$ hat $Z_G(1+q, 1+q^2, \dots, 1+q^n)$ symmetrische, unimodale und ganzzahlige Koeffizienten.

Beweis. Folgt aus Lemma 5.10 und Satz 5.15. □

Beispiel 7.24.

(i) Für $n = 3$ und $G = S_2 \leq S_3$ (wie in Beispiel 5.9) gilt $Z_G(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^3 + xy)$ und

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 |(B_n/G)_k| q^k &= Z_G(1+q, 1+q^2, 1+q^3) = \frac{1}{2}((1+q)^3 + (1+q)(1+q^2)) \\ &= \frac{1}{2}(2 + 4q + 4q^2 + 2q^3) = 1 + 2q + 2q^2 + q^3. \end{aligned}$$

(ii) Für $n = 5$ und $G = \langle (1, 2, 3, 4, 5) \rangle$ (wie in Beispiel 5.9) gilt $Z_G(x_1, \dots, x_5) = \frac{1}{5}(x_1^5 + 4x_5)$ und

$$\sum_{k=0}^5 |(B_n/G)_k| q^k = Z_G(1+q, \dots, 1+q^5) = \frac{1}{5}((1+q)^5 + 4(1+q^5)) = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5.$$

Dies zählt auch die Halsketten mit fünf Perlen aus zwei Farben.

(iii) Sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$ als Quadrat angeordnet wie in Beispiel 7.4 und $G = D_8 \leq \text{Sym}(X)$. Nach Beispiel 7.9 ist $Z_G = \frac{1}{8}(z_1^4 + 3z_2^2 + 2z_1^2 z_2 + 2z_4)$ und daher

$$\sum_{k=0}^8 |(B_X/G)_k| q^k = \frac{1}{8}((1+q)^4 + 3(1+q^2)^2 + 2(1+q)^2(1+q^2) + 2(1+q^4)) = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 = \binom{4}{2}_q.$$

Tatsächlich haben G und $S_2 \wr S_2$ wie in Definition 6.14 den gleichen Zyklenindikator (als (verschiedene) 2-Sylowgruppen von S_4 sind G und $S_2 \wr S_2$ in S_4 konjugiert). Man bestätigt auf diese Weise Satz 6.12 (siehe auch Satz 6.16).

Bemerkung 7.25. Man kann allgemeiner zeigen, dass $Z_G(\alpha(q), \alpha(q^2), \dots)$ symmetrisch und unimodal ist, falls α ein Polynom mit nicht-negativen, ganzzahligen, symmetrischen und unimodalen Koeffizienten ist.

Bemerkung 7.26. Wir zählen nun Graphen bis auf Isomorphie wie in Satz 5.16. Dafür sei $M := \{1, \dots, m\}$ und $n := \binom{m}{2}$. Sei $S_m^{(2)}$ das Bild des kanonischen Homomorphismus $S_m \cong \text{Sym}(M) \rightarrow \text{Sym}\left(\binom{M}{2}\right) \cong S_n$.

Satz 7.27. Sei $\rho_k(m)$ die Anzahl der einfachen Graphen mit m Ecken und k Kanten bis auf Isomorphie. Dann gilt

$$\sum_{k \geq 0} \rho_k(m) q^k = Z_{S_m^{(2)}}(1+q, \dots, 1+q^n),$$

wobei $n := \binom{m}{2}$.

Beweis. Wie Satz 5.16 ist $\rho_k(m) = |(B_\Omega/S_m^{(2)})_k|$ mit $\Omega = \binom{M}{2}$. Die Behauptung folgt daher aus Satz 7.22. \square

Beispiel 7.28.

- (i) Wir berechnen $Z_{S_m^{(2)}}$ für „kleine“ m . Haben $\sigma, \tau \in S_m$ den gleichen Typ, so haben auch die Bilder von σ und τ den gleichen Typ in S_n (nach Bemerkung 4.10 Diskrete Mathematik sind σ und τ konjugiert in S_m und daher auch in S_n). Nach Satz 7.16 wissen wir wie viele Permutationen es von jedem Typ gibt. Für $m = 4$ nummerieren wir

$$\binom{M}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Man erhält

Vertreter	Typ in S_m	Anzahl	Vertreter in S_n	Typ in S_n
1	(4, 0, 0, 0)	1	1	(6, 0, 0, 0, 0, 0)
(1, 2)	(2, 1, 0, 0)	6	(2, 4)(3, 5)	(2, 2, 0, 0, 0, 0)
(1, 2, 3)	(1, 0, 1, 0)	8	(1, 4, 2)(3, 5, 6)	(0, 0, 2, 0, 0, 0)
(1, 2, 3, 4)	(0, 0, 0, 1)	6	(1, 4, 6, 3)(2, 5)	(0, 1, 0, 1, 0, 0)
(1, 2)(3, 4)	(0, 2, 0, 0)	3	(2, 5)(3, 4)	(2, 2, 0, 0, 0, 0)

Daher ist

$$Z_{S_4^{(2)}}(z_1, \dots, z_6) = \frac{1}{24}(z_1^6 + 9z_1^2 z_2^2 + 8z_3^2 + 6z_2 z_4).$$

Satz 7.27 zeigt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 \rho_k(m) q^k &= \frac{1}{24}((1+q)^6 + 9(1+q)^2(1+q^2)^2 + 8(1+q^3)^2 + 6(1+q^2)(1+q^4)) \\ &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 \end{aligned}$$

(vgl. Beispiel 5.18).

- (ii) Wir wollen nun Graphen mit Mehrfachkanten zählen. Nehmen wir an, zwischen je zwei Ecken dürfen (höchstens) zwei Kanten sein. Diese Graphen lassen sich durch Färbungen der Form $\binom{M}{2} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ beschreiben. Sei $\alpha(i_0, i_1, i_2)$ die Anzahl dieser nicht-äquivalenten Färbungen f mit $|\{x \in \binom{M}{2} : f(x) = j\}| = i_j$ für $j = 0, 1, 2$. Wie in Satz 7.22 erhält man

$$\sum_{i_0, i_1, i_2 \geq 0} \alpha(i_0, i_1, i_2) x^{i_0} y^{i_1} z^{i_2} = Z_{S_m^{(2)}}(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, \dots). \quad (7.1)$$

Die Anzahl der nicht-isomorphen Graphen mit m Ecken und k Kanten (einschließlich Vielfachheiten) ist

$$\tau_k(m) := \sum_{\substack{i_0, i_1, i_2 \geq 0 \\ i_1 + 2i_2 = k}} \alpha(i_0, i_1, i_2).$$

Setzt man $x = 1$, $y = q$ und $z = q^2$ in (7.1), so folgt

$$\sum_{k=0}^{2n} \tau_k(m) q^k = Z_{S_m^{(2)}}(1 + q + q^2, 1 + q^2 + q^4, \dots, 1 + q^n + q^{2n})$$

(mit $n := \binom{m}{2}$). Für $m = 4$ erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{12} \tau_k(4) q^k &= \frac{1}{24}((1+q+q^2)^6 + 9(1+q+q^2)^2(1+q^2+q^4)^2 \\ &\quad + 8(1+q^3+q^6)^2 + 6(1+q^2+q^4)(1+q^4+q^8)) \\ &= 1 + q + 3q^2 + 5q^3 + 8q^4 + 9q^5 + 12q^6 + 9q^7 + 8q^8 + 5q^9 + 3q^{10} + q^{11} + q^{12}. \end{aligned}$$

Die Anzahl aller dieser Multigraphen (bis auf Isomorphie) ist demnach $Z_{S_4^{(2)}}(3, \dots, 3) = 1 + 1 + 3 + \dots + 3 + 1 + 1 = 66$ (setze $q = 1$). Analog ergibt sich die Anzahl der Multigraphen mit vier Ecken und höchstens $(s - 1)$ -fachen Kanten durch

$$Z_{S_4^{(2)}}(s, \dots, s) = \frac{1}{24}(s^6 + 9s^4 + 14s^2).$$

Bemerkung 7.29. Erdős und Rényi haben mit obigen Methoden bewiesen, dass fast alle einfachen Graphen *asymmetrisch* sind, d. h. keinerlei Symmetrien aufweisen (triviale Automorphismengruppe). Die Anzahl aller nicht-isomorphen Graphen mit n Ecken strebt daher gegen $\frac{1}{n!}2^{\binom{n}{2}}$ mit $n \rightarrow \infty$.

8 Young-Tableaux

Bemerkung 8.1. Wir betrachten die (unendliche) geordnete Menge Y aller Partitionen wie Definition 6.3. Die Partitionen von n bilden das n -te Level Y_n (die Elemente mit Rang n). Sicher ist $Y = Y_0 \dot{\cup} Y_1 \dot{\cup} \dots$. Wir wollen Wege im Hasse-Diagramm von Y zählen.

Definition 8.2. Ein *Hasse-Weg* ist ein Weg $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ in Y . Dabei gilt $|\lambda_i| = |\lambda_{i+1}| \pm 1$ für $i = 0, \dots, n - 1$. Im Fall $|\lambda_i| = |\lambda_{i+1}| - 1$ spricht man von einem U -Schritt (U für „up“, also im Hasse-Diagramm nach oben) und anderenfalls von einem D -Schritt. Jeder Weg W setzt sich aus Schritten A_1, \dots, A_n mit $A_i \in \{U, D\}$ zusammen. Man nennt $A_n \dots A_1$ den *Typ* von W (Achtung Reihenfolge).

Beispiel 8.3. Der Weg $\emptyset, (1), (2), (2, 1), (1, 1)$ hat Typ $DUUU = DU^3$.

Bemerkung 8.4. Die Wege vom Typ U^n , die bei \emptyset beginnen lassen sich durch Hinzufügen von Boxen zum Young-Diagramm beschreiben. Wir nummerieren die Boxen in der Reihenfolge wie sie hinzugefügt werden:

$$\emptyset \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$$

Definition 8.5. Ein (*Standard*)-*Young-Tableau* ist ein mit den Zahlen $1, \dots, n$ ausgefülltes Young-Diagramm τ einer Partition von n , wobei die Zahlen in jeder Zeile und jeder Spalte aufsteigend sortiert sind. Man nennt λ die *Form* von τ . Die Anzahl der Young-Tableaux der Form λ sei f^λ .

Beispiel 8.6. Es gilt $f^{(2^2, 1)} = 5$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Definition 8.7. Sei b eine Box eines Young-Diagramms τ . Der *Haken* $H(b)$ von b ist die Menge der Boxen von τ rechts und unterhalb von b (einschließlich b selbst). Die *Hakenlänge* von b ist $h(b) := |H(b)|$.

Satz 8.8 (Hakenformel). *Für jede Partition λ von n mit Young-Diagramm τ gilt*

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{b \text{ Box von } \tau} h(b)}. \quad (8.1)$$

Beispiel 8.9. Wir tragen die Hakenlängen für $\lambda = (4, 3, 1)$ in das Young-Diagramm ein:

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Es folgt

$$f^\lambda = \frac{8!}{6 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70.$$

Bemerkung 8.10. Der Beweis der Hakenformel benötigt einige Vorarbeiten:

(i) Jedes Element im Polynomring $R := \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_m]$ lässt sich eindeutig in der Form

$$\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_m \geq 0} a_{i_1, \dots, i_m} X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m}$$

schreiben, wobei nur endlich viele Koeffizienten $a_{i_1, \dots, i_m} \in \mathbb{Q}$ von Null verschieden sind.

(ii) Man nennt $\deg \alpha := \sup\{i_1 + \dots + i_m : a_{i_1, \dots, i_m} \neq 0\}$ den *Grad* von α , wobei $\deg 0 = \sup \emptyset = -\infty$. Man nennt α *homogen* (vom Grad d), falls jedes Monom in α den gleichen Grad (d) hat. Produkte von homogenen Polynomen sind wieder homogen, wobei sich der Grad addiert.

(iii) Zwei Polynome $\alpha, \beta \in R$ heißen *assoziiert*, falls $\alpha = c\beta$ für ein $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf R .

(iv) Ein Polynom $\varphi \in R \setminus \mathbb{Q}$ heißt *irreduzibel*, falls keine Faktorisierung $\varphi = \alpha\beta$ mit $\alpha, \beta \in R \setminus \mathbb{Q}$ existiert. Wegen $\deg \varphi = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ sind Polynome vom Grad 1 stets irreduzibel.

(v) Sei P ein Repräsentantensystem für die irreduziblen Polynome bis auf Assoziiertheit. Durch Induktion nach dem Grad sieht man, dass jedes $\alpha \in R \setminus \{0\}$ eine Faktorisierung der Form

$$\alpha = e \prod_{\varphi \in P} \varphi^{a_\varphi} \tag{8.2}$$

mit $e \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $a_\varphi \geq 0$ für $\varphi \in P$ besitzt. Nach dem Lemma von Gauß (Algebra 2) ist diese Faktorisierung eindeutig, d. h. R ist ein *faktorieller Ring*.

(vi) Der Quotientenkörper $K := Q(R) = \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_m)$ ist der Körper der rationalen Funktionen in X_1, \dots, X_m , d. h. jedes Element in K lässt sich in der Form $\frac{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha, \beta \in R$ und $\beta \neq 0$ schreiben. Dabei gilt

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \iff \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1.$$

Lemma 8.11. Sei $\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq m} (X_i - X_j) \in R$ und

$$\alpha := \sum_{i=1}^m X_i \Delta(X_1, \dots, X_i + Y, \dots, X_m) \in R[Y].$$

Dann gilt

$$\alpha = \left(X_1 + \dots + X_m + \binom{m}{2} Y \right) \Delta.$$

Beweis (Zhang). Sei $i < j$ und $i \neq k \neq j$. Vertauschen von i und j ändert das Vorzeichen von Δ (das folgt aus der Definition des Signums). Damit ändert auch $X_k \Delta(\dots, X_k + Y, \dots)$ das Vorzeichen. Durch Vertauschen von i und j werden außerdem die Summanden $X_i \Delta(\dots, X_i + Y, \dots)$ und $X_j \Delta(\dots, X_j + Y, \dots)$ vertauscht und sie ändern zusätzlich ihr Vorzeichen. Insgesamt ändert α das Vorzeichen beim Vertauschen von i und j . Setzt man $X_i = X_j$, so wird $\alpha = 0$. Als Polynom in X_i hat α daher Nullstelle X_j . Man kann also den Faktor $X_i - X_j$ im Polynomring $\mathbb{Q}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_m)[X_i]$ abspalten. Da $X_i - X_j$ normiert ist, treten bei der Division keine Nenner auf. Daher ist $X_i - X_j$ ein Teiler von α im faktoriellen Ring $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_m]$. Da die Faktoren $X_i - X_j$ von Δ irreduzibel und paarweise nicht assoziiert sind, ist α auch durch Δ teilbar. Sei also $\alpha = \beta \Delta$. Da α und Δ homogen sind, ist β homogen vom Grad 1. Da die Aussage für $Y = 0$ stimmt, gilt $\beta = X_1 + \dots + X_m + cY$ für ein $c \in \mathbb{Q}$. Man erhält c , indem man nach Y ableitet und anschließend $Y = 0$ setzt. Es gilt

$$\begin{aligned} (X_i \Delta(X_1, \dots, X_i + Y, \dots, X_m))'(0) &= X_i \left(\sum_{j>i} \frac{\Delta}{X_i - X_j} - \sum_{j<i} \frac{\Delta}{X_j - X_i} \right) = X_i \Delta \sum_{j \neq i} \frac{1}{X_i - X_j} \\ c &= \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} \frac{X_i}{X_i - X_j} = \sum_{i<j} \frac{X_i - X_j}{X_i - X_j} = \binom{m}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 8.12. Für jede Partition λ sei $f(\lambda) := f^\lambda$ (wir lassen hier die Partition (0) mit dem „leeren“ Tableau zu). Ist $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ eine beliebige Folge aber keine Partition, so setzen wir $f(\lambda) := 0$. In jedem Young-Tableau von λ befindet sich die Zahl n an einer äußeren „Ecke“, d. h. durch Entfernen von n erhält man ein Young-Tableau einer Partition $\mu \prec \lambda$. Es gilt offenbar

$$f^\lambda = \sum_{\mu \prec \lambda} f^\mu.$$

Daher ist f durch die folgende Rekursionsvorschrift eindeutig bestimmt:

$$f(0) = 1, \tag{8.3}$$

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (\lambda \in \mathbb{N}_0^m), \tag{8.4}$$

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0 \quad (\exists i : \lambda_i + 1 = \lambda_{i+1}), \tag{8.5}$$

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) + \dots + f(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m - 1) \quad (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 1). \tag{8.6}$$

Beweis der Hakenformel (Glass-Ng). Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Es genügt zu zeigen, dass die rechte Seite von (8.1) die gleiche Rekursionsvorschrift wie die Funktion f aus Bemerkung 8.12 erfüllt. Das Produkt der Hakenlängen in der k -ten Zeile von λ ist (von rechts nach links gelesen):

$$\begin{aligned} & [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\lambda_k - \lambda_{k+1})][(\lambda_k - \lambda_{k+1} + 2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k+2} + 1)] \\ & [(\lambda_k - \lambda_{k+2} + 3) \dots (\lambda_k - \lambda_{k+3} + 2)] \dots [(\lambda_k - \lambda_m + m - k + 1) \dots (\lambda_k + m - k)] \\ & = \frac{(\lambda_k + m - k)!}{\prod_{l>k} (\lambda_k - \lambda_l - k + l)}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (8.1) ist daher

$$g(\lambda) := n! \frac{\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{i=1}^m (\lambda_i + m - i)!} = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right)! \frac{\Delta(\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \dots, \lambda_m)}{\prod_{i=1}^m (\lambda_i + m - i)!}.$$

Man sieht leicht, dass (8.3) für g gilt. Für $\lambda_m = 0$ ist

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= n! \frac{\Delta(\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \dots, \lambda_{m-1} + 1) \prod_{i=1}^{m-1} (\lambda_i + m - i)}{\prod_{i=1}^{m-1} (\lambda_i + m - i)!} \\ &= n! \frac{\Delta(\lambda_1 + m - 2, \lambda_2 + m - 3, \dots, \lambda_{m-1})}{\prod_{i=1}^{m-1} (\lambda_i + m - i - 1)!} = g(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}), \end{aligned}$$

d. h. (8.4) gilt. Für $\lambda_i + 1 = \lambda_{i+1}$ ist $\lambda_i + m - i = \lambda_{i+1} + m - (i + 1)$ und mit Δ verschwindet auch $g(\lambda)$, d. h. (8.5) gilt. Schließlich substituieren wir $X_i := \lambda_i + m - i$ für $i = 1, \dots, m$ und $Y = -1$ in Lemma 8.11. Dann ist einerseits

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^m (\lambda_i + m - i) \Delta(\lambda_1 + m - 1, \dots, \lambda_i + m - i - 1, \dots, \lambda_m) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^m (\lambda_i + m - i)! \sum_{i=1}^m g(\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_m) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\sum_{i=1}^m (\lambda_i + m - i) - \binom{m}{2} \right) \Delta(\lambda_1 + m - 1, \dots, \lambda_m) = n \Delta(\lambda_1 + m - 1, \dots, \lambda_m) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^m (\lambda_i + m - i)! g(\lambda). \end{aligned}$$

Damit folgt auch (8.6). □

Definition 8.13. Ist $\lambda \vdash n$ und $w = A_m A_{m-1} \dots A_1$ eine Folge aus $\{U, D\}$, so definieren wir $\alpha(w, \lambda)$ als die Anzahl der Hasse-Wege vom Typ w von \emptyset nach λ .

Beispiel 8.14. Die Hasse-Wege $\emptyset, (1), (1, 1), (1), (1, 1)$ und $\emptyset, (1), (2), (1), (1, 1)$ zeigen

$$\alpha(UDUU, (1, 1)) = 2.$$

Nach Bemerkung 8.4 entspricht jeder Hasse-Weg vom Typ U^n einem Young-Tableau. Daher ist $\alpha(U^n, \lambda) = f^\lambda$, falls $\lambda \vdash n$. Jeder Hasse-Weg vom Typ $D^n U^n$ endet in \emptyset . Daher ist

$$\alpha(D^n U^n, \emptyset) = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2.$$

Wir wollen eine allgemeine Formel der Form $\alpha(w, \lambda) = f^\lambda c_w$ finden, wobei c_w nicht von λ abhängt.

Lemma 8.15. Sei $w = D^{s_k} U^{t_k} D^{s_{k-1}} U^{s_{k-1}} \dots D^{s_1} U^{t_1}$ und $\lambda \vdash n$. Genau dann existiert ein Hasse-Weg vom Typ w von \emptyset nach λ , falls

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (t_i - s_i) &\geq 0 && (m = 1, \dots, k) \\ \sum_{i=1}^k (t_i - s_i) &= n. \end{aligned}$$

Beweis. Ein Hasse-Weg vom Typ $D^{s_m}U^{t_m} \dots D^{s_1}U^{t_1}$ von \emptyset endet im Level $\sum_{i=1}^m (t_i - s_i)$. Diese Zahl darf also nicht negativ werden. Geht man weiter bis λ , so endet man im Level $n = \sum_{i=1}^k (i_i - s_i)$. Daher sind die Bedingungen notwendig.

Nehmen wir nun an, dass die Bedingungen erfüllt sind. Sicher existiert ein Hasse-Weg vom Typ U^n von \emptyset nach λ . Nach t_1 Schritten auf diesem Weg gehen wir s_1 Schritte wieder zurück (dies geht wegen $t_1 \geq s_1$). Anschließend gehen wir t_2 Schritte vorwärts auf dem selben Weg. Danach s_2 zurück usw. Am Ende erhält man einen Weg von \emptyset nach λ vom Typ w . \square

Bemerkung 8.16. Sind die Bedingungen von Lemma 8.15 erfüllt, so nennt man w ein λ -Wort (dies hängt eigentlich nur von $|\lambda|$ ab).

Definition 8.17. Auf dem (unendlich-dimensionalen) Vektorraum $\mathbb{R}Y$ definieren wir lineare Abbildungen $U, D : \mathbb{R}Y \rightarrow \mathbb{R}Y$ durch

$$U(\lambda) := \sum_{\mu \triangleright \lambda} \mu$$

$$D(\lambda) := \sum_{\mu \triangleleft \lambda} \mu$$

für $\lambda \in Y$ (vgl. Lemma 4.17).

Lemma 8.18. *Es gilt $DU - UD = \text{id}$.*

Beweis. Für $\lambda \in Y$ gilt

$$(DU - UD)(\lambda) = \sum_{\mu \triangleright \lambda} \sum_{\tau \triangleleft \mu} \tau - \sum_{\mu \triangleleft \lambda} \sum_{\tau \triangleright \mu} \tau.$$

Jedes $\tau \neq \lambda$ kann in der ersten Summe höchstens einmal auftreten. Gegebenenfalls unterscheidet sich τ von λ an genau zwei Stellen (etwa $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_l)$ und $\tau = (\lambda_1, \dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_l)$). Dann tritt τ ebenfalls genau einmal in der zweiten Summe auf (wobei dann $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_l)$ gilt). Die beiden Vorkommen von τ heben sich also gegenseitig auf.

Sei nun $\tau = \lambda$. Sei k die Anzahl der verschiedenen Teile von λ . Dann existieren genau $k + 1$ Partitionen $\mu \triangleright \lambda$ (etwa $\lambda = (5, 4^2, 3^3, 1)$ und $\mu \in \{(6, 4^2, 3^3, 1), (5^2, 4, 3^3, 1), (5, 4^3, 3^2, 1), (5, 4^2, 3^2, 2), (5, 4^2, 3^3, 1^2)\}$). Für jedes solche μ gibt es genau ein $\tau = \lambda$. Andererseits gibt es nur k viele $\mu \triangleleft \lambda$ mit $\mu < \lambda$ (im Beispiel $\mu \in \{(4^3, 3^3, 1), (5, 4, 3^4, 1), (5, 4^2, 3^2, 2, 1), (5, 4^2, 3^3)\}$). Für jedes solche μ tritt $\tau = \lambda$ genau einmal auf. Daher ist

$$(DU - UD)(\lambda) = \lambda. \quad \square$$

Satz 8.19. *Sei λ eine Partition und $w = A_m A_{m-1} \dots A_1$ ein λ -Wort. Für $1 \leq i \leq m$ mit $A_i = D$ sei a_i (bzw. b_i) die Anzahl der D (bzw. U) rechts von A_i in w . Dann ist*

$$\alpha(w, \lambda) = f^\lambda \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ A_i = D}} (b_i - a_i).$$

Beweis. Sei $\lambda \vdash n$. Wir interpretieren die A_i als lineare Abbildungen gemäß Definition 8.17. Sei F die Verkettung dieser Abbildungen entsprechend dem Wort w . Schreibt man $F(\emptyset)$ als Linearkombination der (linear unabhängigen) Elemente in Y , so ist $\alpha(w, \lambda)$ genau der Koeffizient von λ . Nach Lemma 8.18 kann man ein Paar $A_{i+1}A_i = DU$ in F durch $UD + \text{id}$ ersetzen. Nach Ausmultiplizieren ist F eine

Summe von zwei linearen Abbildung, bei denen man wieder DU durch $UD + \text{id}$ ersetzen kann. Nach endlich vielen solchen Schritten erhält man

$$F = \sum_{i \geq 0} r_i U^{n+i} D^i$$

mit $r_i \geq 0$. Wegen $D(\emptyset) = 0$ können wir $F = r_0 U^n$ annehmen, indem wir F durch seine Einschränkung auf Y_0 ersetzen. Der Koeffizient von λ in $U^n(\emptyset)$ ist f^λ . Daher genügt es

$$r_0 = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ A_i = D}} (b_i - a_i)$$

zu zeigen. Wir argumentieren durch Induktion nach der Anzahl $d(w)$ der D in w . Im Fall $d(w) = 0$, also $w = U^n$, ist $r_0 = 1$ das leere Produkt. Sei nun k minimal mit $A_k = D$, also $a_k = 0$ und $b_k = k - 1$. Außerdem ist $F = A_m \dots A_{k+1} D U^{k-1}$. Die Ersetzung $DU = UD + \text{id}$ wie oben führt zu

$$F = A_m \dots A_{k+1} U D U^{k-2} + A_m \dots A_{k+1} U^{k-2} = \dots = \underbrace{(k-1)}_{b_k - a_k} A_m \dots A_{k+1} U^{k-2}.$$

Für $w' := A_m \dots A_{k+1} U^{k-2}$ gilt $d(w') = d(w) - 1$ und die Zahlen a_i, b_i verändern sich zu $a'_i := a_i - 1$ bzw. $b'_i := b_i - 1$. Insbesondere ist $b'_i - a'_i = b_i - a_i$. Die Behauptung folgt nun mit Induktion. \square

Beispiel 8.20. Sei $\lambda = (2^2, 1)$ und $w = U^3 D^2 U^2 D U^3$. Dann ist $a_4 = 0, b_4 = 3, a_7 = 1, b_7 = 5, a_8 = 2, b_8 = 5$ und $f^\lambda = 5$ nach Beispiel 8.6. Also ist

$$\alpha(w, \lambda) = 5(3-0)(5-1)(5-2) = 180.$$

Folgerung 8.21. Es gilt

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = \alpha(D^n U^n, \emptyset) = n!.$$

Beweis. Die erste Gleichung kommt aus Beispiel 8.14. Für die zweite Gleichung setzt man $w = D^n U^n$ in Satz 8.19. Dann ist $a_{n+i} = i - 1$ und $b_{n+i} = n$ für $i = 1, \dots, n$. Dies liefert

$$\alpha(D^n U^n, \emptyset) = f^\emptyset \prod_{i=1}^n (n - i + 1) = n!. \quad \square$$

Bemerkung 8.22. Man kann zeigen, dass die komplexen irreduziblen Charaktere der symmetrischen Gruppe S_n durch die Partitionen $\lambda \vdash n$ indiziert werden können. Für $\chi_\lambda \in \text{Irr}(S_n)$ gilt dabei $\chi_\lambda(1) = f^\lambda$. Folgerung 8.21 ergibt sich dann aus der allgemein gültigen Formel $|G| = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2$ für jede endliche Gruppe G .

Definition 8.23. Für $\lambda \vdash n$ und $l \geq 0$ sei $\beta(l, \lambda)$ die Anzahl der Hasse-Wege von \emptyset nach λ der Länge l (egal von welchem Typ).

Beispiel 8.24. Es gilt $\beta(3, (1)) = 3$, denn $\emptyset, (1), \emptyset, (1)$ und $\emptyset, (1), (2), (1)$ und $\emptyset, (1), (1, 1), (1)$.

Bemerkung 8.25. Offenbar gilt $\beta(l, \lambda) = 0$ falls $l \not\equiv |\lambda| \pmod{2}$. Außerdem ist $\beta(l, \lambda)$ der Koeffizient von λ in $(U + D)^l(\emptyset)$ mit den Abbildungen aus Definition 8.17. Nach Lemma 8.18 existieren $\beta_{ij}(l) \in \mathbb{N}_0$ mit

$$(U + D)^l = \sum_{i,j \geq 0} \beta_{ij}(l) U^i D^j.$$

Wir zeigen, dass die β_{ij} dabei eindeutig bestimmt sind. Seien dafür $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{i,j \geq 0} \gamma_{ij} U^i D^j = 0.$$

Angenommen es existieren $k, l \geq 0$ mit $\gamma_{kl} \neq 0$. Sei l dabei minimal gewählt und $\mu \vdash l$ beliebig. Dann erhält man den Widerspruch

$$0 = \sum_{i,j \geq 0} \gamma_{ij} U^i D^j(\mu) = \sum_{i \geq 0} \gamma_{il} U^i(\emptyset) = \gamma_{kl} U^k(\emptyset) + \sum_{i \neq k} \gamma_{il} U^i(\emptyset).$$

Lemma 8.26. *Es gilt*

$$\beta_{ij}(l) = \begin{cases} 0 & \text{falls } l - i - j < 0, \\ 0 & \text{falls } l - i - j \text{ ungerade,} \\ \frac{l!}{2^m i! j! m!} & \text{falls } l - i - j = 2m \geq 0. \end{cases}$$

Beweis. Sei $\beta_{ij} := \beta_{ij}(l) \neq 0$ und $\lambda \vdash j$. Sicher ist dann $i + j \leq l$, d. h. die erste Behauptung gilt. Außerdem besitzt $\beta_{ij} U^i D^j(\lambda)$ einen Summanden $\mu \in Y_i$. Da alle β_{st} nicht-negativ sind, tritt μ auch in $\sum_{s,t \geq 0} \beta_{st} U^s D^t(\lambda) = (U + D)^l(\lambda)$ auf. Also gilt $|\lambda| + l \equiv |\mu| \pmod{2}$, d. h. $j + l - i$ ist gerade. Dann ist auch $l - i - j$ gerade und die zweite Behauptung folgt.

Wir argumentieren nun durch Induktion nach l . Im Fall $l = 1$ ist $m = 0$ und $\beta_{10} = \beta_{01} = 1$. Sei nun die Behauptung für ein $l \geq 1$ bereits bewiesen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \geq 0} \beta_{ij}(l+1) U^i D^j &= (U + D)^{l+1} = (U + D) \sum_{i,j \geq 0} \beta_{ij}(l) U^i D^j \\ &= \sum_{i,j \geq 0} \beta_{ij}(l) (U^{i+1} D^j + D U^i D^j). \end{aligned}$$

Nach Lemma 8.18 ist $D U^i = U D U^{i-1} + U^{i-1} = \dots = U^i D + i U^{i-1}$ und es folgt

$$\sum_{i,j \geq 0} \beta_{ij}(l+1) U^i D^j = \sum_{i,j \geq 0} \beta_{ij}(l) (U^{i+1} D^j + U^i D^{j+1} + i U^{i-1} D^j).$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt

$$\beta_{i,j}(l+1) = \beta_{i-1,j}(l) + \beta_{i,j-1}(l) + (i+1) \beta_{i+1,j}(l).$$

Sei $l+1-i-j = 2m$. Nach Induktion ist dann

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}(l+1) &= \frac{l!}{2^m (i-1)! j! m!} + \frac{l!}{2^m i! (j-1)! m!} + (i+1) \frac{l!}{2^{m-1} (i+1)! j! (m-1)!} \\ &= \frac{l!(i+j+2m)}{2^m i! j! m!} = \frac{(l+1)!}{2^m i! j! m!}. \end{aligned} \quad \square$$

Satz 8.27. *Sei $l \geq n$, $\lambda \vdash n$ und $l - n$ gerade. Dann ist*

$$\beta(l, \lambda) = \binom{l}{n} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (l - n - 1)) f^\lambda.$$

Beweis. Nach Bemerkung 8.25 ist

$$(U + D)^l(\emptyset) = \sum_{i \geq 0} \beta_{i0}(l) U^i(\emptyset) = \sum_{i \geq 0} \beta_{i0}(l) \sum_{\mu \vdash i} f^\mu \mu.$$

Der Koeffizient von λ darin ist

$$\beta_{n0}(l) f^\lambda \stackrel{8.26}{=} \frac{l!}{2^m n! m!} f^\lambda = \binom{l}{n} \frac{(2m)!}{2^m m!} f^\lambda,$$

mit $l - n = 2m$. Dies zeigt die Behauptung. \square

Folgerung 8.28. Die Anzahl aller Hasse-Wege der Länge $2m$ von \emptyset nach \emptyset ist

$$\beta(2m, \emptyset) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m - 1).$$

Beweis. Folgt aus Satz 8.27 mit $n = 0$, $\lambda = \emptyset$ und $l = 2m$. \square

Definition 8.29. Für $k \geq 1$ ist $p(k) := |Y_k|$ die Anzahl der Partition von k . Wir setzen zusätzlich $p(i) = 0$ für $i < 0$. Sei $Y_{k-1,k} := Y_{k-1} \cup Y_k$. Wir identifizieren $Y_{k-1,k}$ auch mit dem entsprechenden Hasse-Diagramm (ein bipartiter Graph).

Satz 8.30. Die Eigenwerte von $Y_{k-1,k}$ sind 0 mit Vielfachheit $p(k) - p(k-1)$ und $\pm\sqrt{s}$ mit Vielfachheit $p(k-s) - p(k-s-1)$ für $s = 1, \dots, k$.

Beweis. Wegen $\mathbb{R}Y_{k-1,k} = \mathbb{R}Y_{k-1} \oplus \mathbb{R}Y_k$ lässt sich jedes $v \in \mathbb{R}Y_{k-1,k}$ in der Form $v = v_{k-1} + v_k$ mit $v_{k-1} \in \mathbb{R}Y_{k-1}$ und $v_k \in \mathbb{R}Y_k$ schreiben. Sei U_{k-1} die Einschränkung von U auf $\mathbb{R}Y_{k-1}$ und sei D_k die Einschränkung von D auf $\mathbb{R}Y_k$. Ist B_k die Matrix von D_k bzgl. der Basen Y_k und Y_{k-1} , so ist B_k^t die Matrix von U_{k-1} . Außerdem ist $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$ die Adjazenzmatrix von $Y_{k-1,k}$. Es gilt $Av = B_k v_k + B_k^t v_{k-1} = D(v_k) + U(v_{k-1})$. Die positiv semidefinite Matrix $B_{k-1}^t B_{k-1}$ hat nicht-negative Eigenwerte (vgl. Beweis von Lemma 4.17). Daher hat $B_k B_k^t \stackrel{8.18}{=} B_{k-1}^t B_{k-1} + 1$ positive Eigenwerte. Insbesondere ist $B_k B_k^t$ invertierbar und U_{k-1} ist injektiv und D_k ist surjektiv. Da k beliebig ist, ist auch U injektiv und D surjektiv. Daher ist

$$\dim \text{Ker}(D_k) = \dim \mathbb{R}Y_k - \dim \mathbb{R}Y_{k-1} = p(k) - p(k-1).$$

Für $v \in \text{Ker}(D_k)$ ist $v = v_k$ und $Av = D(v) = 0$. Also ist 0 ein Eigenwert von A mit Vielfachheit $\geq p(k) - p(k-1) \geq 0$.

Sei nun $w \in \text{Ker}(D_s)$ für $0 \leq s \leq k-1$ und

$$v := v_{k-1} + v_k := \pm\sqrt{k-s} U^{k-1-s}(w) + U^{k-s}(w) \in \mathbb{R}Y_{k-1,k}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} Av &= \pm\sqrt{k-s} U^{k-s}(w) + D U^{k-s}(w) \stackrel{8.18}{=} \pm\sqrt{k-s} U^{k-s}(w) + \overbrace{U^{k-s} D(w)}^{=0} + (k-s) U^{k-s-1}(w) \\ &= \pm\sqrt{k-s} (U^{k-s}(w) \pm \sqrt{k-s} U^{k-s-1}(w)) = \pm\sqrt{k-s} v. \end{aligned}$$

Daher sind $\pm\sqrt{k-s}$ beides Eigenwerte von A (vgl. Aufgabe 4). Sei w^1, \dots, w^l eine Basis von $\text{Ker}(D_s)$. Da U injektiv ist, sind sowohl $U^{k-s}(w^1), \dots, U^{k-s}(w^l)$ als auch $U^{k-1-s}(w^1), \dots, U^{k-1-s}(w^l)$ linear unabhängig. Damit sind auch die entsprechenden Vektoren v^1, \dots, v^l linear unabhängig. Die Vielfachheit

des Eigenwerts $\sqrt{k-s}$ (bzw. $-\sqrt{k-s}$) ist daher mindestens $\dim \text{Ker}(D_s) = p(s) - p(s-1)$. Die Summe der Vielfachheiten aller bisher gefundenen Eigenwert ist mindestens

$$p(k) - p(k-1) + 2 \sum_{s=0}^{k-1} (p(s) - p(s-1)) = p(k) + p(k-1) = \dim \mathbb{R}Y_{k-1,k}.$$

Somit haben wir alle Eigenwerte und die dazu gehörigen Vielfachheiten gefunden. \square

Folgerung 8.31. Sei $m, k \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge $2m$ in $Y_{k-1,k}$ mit Start/Ziel in Y_k ist

$$\sum_{s=1}^k (p(k-s) - p(k-s-1)) s^m.$$

Beweis. Die Anzahl aller geschlossenen Wege in $Y_{k-1,k}$ der Länge $2m$ ist

$$\sum_{s=1}^k (p(k-s) - p(k-s-1)) (\sqrt{s}^{2m} + (-\sqrt{s})^{2m}) = 2 \sum_{s=1}^k (p(k-s) - p(k-s-1)) s^m$$

nach Satz 1.10. Ist $\lambda_1, \dots, \lambda_{2m}, \lambda_1$ ein geschlossener Weg mit $\lambda_1 \in Y_k$, so ist $\lambda_2, \dots, \lambda_{2m}, \lambda_1, \lambda_2$ ein geschlossener Weg, der in Y_{k-1} startet/endet. Daher gibt es genauso viele geschlossene Wege mit Start in Y_k wie mit Start in Y_{k-1} . Daraus folgt die Behauptung. \square

Beispiel 8.32.

- (i) Der Fall $m = 1$ zeigt, dass $Y_{k-1,k}$ genau $p(k-1) + p(k-2) + \dots + p(0)$ Kanten besitzt (interessanterweise wird dafür $p(k)$ nicht benötigt).
- (ii) Man zeigt leicht: $p(0) = p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$ und $p(5) = 7$. Für $k = 6$ erhält man daher

$$\begin{aligned} p(5) - p(4) + (p(4) - p(3))2^m + (p(3) - p(2))3^m + (p(2) - p(1))4^m + (p(1) - p(0))5^m + p(0)6^m \\ = 2 + 2^{m+1} + 3^m + 4^m + 6^m \end{aligned}$$

geschlossene Wege der Länge $2m$ in $Y_{5,6}$ mit Start in Y_6 .

9 Der Matrix-Baum-Satz

Definition 9.1. Sei G ein Graph. Ein *Kreis* von G ist ein geschlossener Weg (mit Länge ≥ 1), bei dem keine Ecke doppelt besucht wird (außer Start/Ziel). Ein zusammenhängender Graph ohne Kreise heißt *Baum*. Insbesondere besitzt ein Baum keine Schleifen. Eine Ecke eines Baumes mit nur einem Nachbarn heißt *Blatt*. Ein *Spannbaum* von G ist ein Baum B mit den gleichen Ecken wie G , sodass jede Kante von B auch eine Kante von G ist. Die Anzahl $k(G)$ aller Spannbäume von G nennt man die *Komplexität* von G .

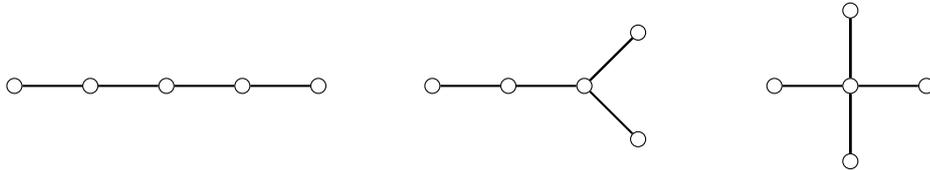
Bemerkung 9.2.

- (i) Jeder Baum B besitzt ein Blatt, denn jeder Weg muss irgendwann in einer „Sackgasse“ enden (da es keine Kreise gibt, kann man keine Ecke doppelt besuchen). Besitzt B mindestens zwei Ecken, so gibt es auch mindestens zwei Blätter (Start und Ziel eines maximalen Wegs).

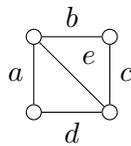
- (ii) Ein Graph G ist genau dann zusammenhängend, wenn $k(G) \geq 1$ (man entferne solange Kanten bis keine Kreise mehr vorhanden sind).

Beispiel 9.3.

- (i) Bis auf Isomorphie gibt es drei Bäume mit fünf Ecken:



- (ii) Der Graph



besitzt acht Spannbäume (die entsprechenden Kanten sind $abc, abd, acd, bcd, abe, ace, bde, cde$).

Lemma 9.4. Sei G ein Graph mit p Ecken. Dann sind äquivalent:

- (1) G ist ein Baum.
- (2) G ist zusammenhängend und besitzt genau $p - 1$ Kanten.
- (3) G enthält keine Kreise und besitzt genau $p - 1$ Kanten.
- (4) Je zwei Ecken von G sind durch genau einen Weg verbunden.

Beweis.

- (1) \implies (2): Jeder Baum ist zusammenhängend. Wir bestimmen die Anzahl der Kanten durch Induktion nach p . Im Fall $p = 1$ besitzt G keine Kanten. Sei nun $p \geq 2$ und b ein Blatt von G (existiert nach Bemerkung 9.2). Durch Entfernen von b und der Kante, die b enthält, erhält man einen Baum G' mit $p - 1$ Ecken. Nach Induktion besitzt G' $p - 2$ Kanten. Daher hat G genau $p - 1$ Kanten.
- (2) \implies (3): Angenommen G enthält einen Kreis. Dann kann man eine Kante entfernen, sodass G immer noch zusammenhängend ist. Entfernt man gegebenenfalls weitere Kanten, so wird G ein Baum mit weniger als $p - 1$ Kanten. Dies widerspricht (1) \implies (2).
- (3) \implies (4): Je zwei Ecken von G können höchstens durch einen Weg verbunden sein, denn anderenfalls gäbe es einen Kreis. Da G keine Kreise besitzt, ist jede Zusammenhangskomponente K von G ein Baum. Besteht K aus k Ecken, so besitzt K genau $k - 1$ Kanten nach (1) \implies (2). Da G genau $p - 1$ Kanten besitzt, kann es nur eine Zusammenhangskomponente geben. Daher sind je zwei Ecken durch einen Weg verbunden.
- (4) \implies (1): Trivial. □

Bemerkung 9.5. Der folgende Satz verallgemeinert die Produktregel für Determinanten $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Satz 9.6 (CAUCHY-BINET-Formel). Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ gilt

$$\det(AB) = \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |K|=n}} \det(A_K) \det(B_K),$$

wobei $A_K := (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \in K}}$ und $B_K := (b_{ij})_{\substack{i \in K \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Beweis. Nach der Leibniz-Formel für Determinanten gilt

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{k\sigma(i)} \right) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq m} \prod_{i=1}^n a_{ik_i} b_{k_i \sigma(i)}.$$

Sei $k_i = k_j$ für gewisse $i \neq j$. Für $\sigma \in S_n$ sei $\sigma' := \sigma \circ (i, j) \in S_n$. Dann ist $\operatorname{sgn}(\sigma') = -\operatorname{sgn}(\sigma)$ und

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^n a_{lk_l} b_{k_l \sigma(l)} &= a_{ik_i} b_{k_i \sigma(i)} a_{jk_j} b_{k_j \sigma(j)} \prod_{i \neq l \neq j} a_{lk_l} b_{k_l \sigma(l)} \\ &= a_{ik_i} b_{k_j \sigma'(j)} a_{jk_j} b_{k_i \sigma'(i)} \prod_{i \neq l \neq j} a_{lk_l} b_{k_l \sigma'(l)} = \prod_{l=1}^n a_{lk_l} b_{k_l \sigma'(l)}. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Summanden heben sich also in der Summe auf. Es verbleiben daher nur die Summanden mit paarweise verschiedenen k_i . Insbesondere erhält man die leere Summe falls $m < n$. Für $m \geq n$ ist

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}} \sum_{\tau \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{ik_{\tau(i)}} b_{k_{\tau(i)} \sigma(i)} \\ &= \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}} \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{ik_{\tau(i)}} \prod_{j=1}^n b_{k_j \sigma \tau^{-1}(j)} \quad (j := \tau(i)) \end{aligned}$$

Mit σ und τ durchlaufen auch $\sigma\tau$ und τ alle Permutationen in S_n . Wir können daher σ durch $\sigma\tau$ ersetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}} \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n a_{ik_{\tau(i)}} b_{k_i \sigma(i)} \\ &= \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \subseteq \{1, \dots, m\}} \left(\sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n a_{ik_{\tau(i)}} \right) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{k_i \sigma(i)} \right) \\ &= \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |K|=n}} \det(A_K) \det(B_K). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 9.7. Sei $G = (E, K)$ ein Graph ohne Schleifen. Eine *Orientierung* von G ist eine Funktion $f : K \rightarrow E \times E$ mit $f(\{x, y\}) \in \{(x, y), (y, x)\}$. Auf diese Weise wird G zu einem *gerichteten* Graphen, d. h. jede Kante ist ein Pfeil mit Start und Ziel. Sei $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ und $K = \{k_1, \dots, k_q\}$. Seien d_1, \dots, d_p die Grade von e_1, \dots, e_p . Sei $A(G) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ die Adjazenzmatrix.

(i) Die *Laplace-Matrix* $L(G) = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ist durch

$$l_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{falls } i \neq j, \\ d_i & \text{falls } i = j \end{cases}$$

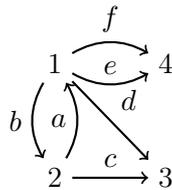
definiert (dies hängt nicht von der Orientierung ab).

(ii) Die *Inzidenzmatrix* $M(G) = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ist durch

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } f(k_j) = (*, e_i), \\ -1 & \text{falls } f(k_j) = (e_i, *), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

Beispiel 9.8. Der Graph



liefert

$$L(G) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 9.9. Offenbar sind alle Zeilen- und Spaltensummen von $L(G)$ gleich 0. Insbesondere sind die Zeilen (und Spalten) linear abhängig und es folgt $\det(L(G)) = 0$. Analog summieren sich auch die Zeilen von $M(G)$ zum Nullvektor. Daher ist $\text{rg}(M(G)) < p$.

Lemma 9.10. Sei G ein Graph mit Orientierung und ohne Schleifen. Sei $A := A(G)$, $M := M(G)$ und $L := L(G)$. Dann gilt

(i) $MM^t = L$.

(ii) Ist G regulär vom Grad d , so ist $L = d1 - A$. Hat also G die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, so hat L die Eigenwerte $d - \lambda_1, \dots, d - \lambda_p$.

Beweis. Seien $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ die Ecken und $K = \{k_1, \dots, k_q\}$ die Kanten von G . Sei $M = (m_{ij})$. Dann gilt

$$(MM^t)_{ij} = \sum_{l=1}^q m_{il}m_{jl}.$$

Im Fall $i = j$ ist jeder Summand 0 oder 1 und die Summe ergibt den Grad von e_i . Im Fall $i \neq j$ ist $m_{il}m_{jl} \neq 0$ genau dann, wenn $k_l = \{e_i, e_j\}$. Gegebenenfalls ist $m_{il}m_{jl} = -1$. Dies zeigt $(MM^t)_{ij} = -a_{ij}$ und $MM^t = L$. Da G keine Schleifen hat, besteht die Hauptdiagonale von A aus Nullen. Die zweite Behauptung folgt daher aus der Definition. \square

Definition 9.11. Für einen zusammenhängenden Graphen G mit Orientierung sei $M_0 = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p-1 \\ 1 \leq j \leq q}}$ die Matrix, die aus $M(G)$ entsteht, indem man die letzte Zeile streicht. Man nennt M_0 die *reduzierte Inzidenzmatrix* von G . Für eine Teilmenge $S \subseteq \{1, \dots, q\}$ mit $|S| = p - 1$ sei $M_0[S] := (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p-1 \\ j \in S}}$.

Bemerkung 9.12. Im Folgenden werden einem Graphen G stillschweigend eine beliebige Orientierung zuweisen, um mit $M(G)$ arbeiten zu können.

Lemma 9.13. Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph ohne Schleifen und $S \subseteq K$ mit $|S| = |E| - 1$. Ist (E, S) ein Spannbaum von G , so gilt $\det(M_0[S]) = \pm 1$ und anderenfalls $\det(M_0[S]) = 0$.

Beweis. Ist $H := (E, S)$ kein Spannbaum, so ist H nach Lemma 9.4 nicht zusammenhängend. Sei C eine Zusammenhangskomponente von H , die die „letzte“ Ecke e_p nicht enthält (die der letzten Zeile in $M(G)$ entspricht). Die Zeilen aus $M_0[S]$, die zu C gehören bilden dann $M(C)$ (indem man Nullspalten streicht). Nach Bemerkung 9.9 ist die Summe dieser Zeilen der Nullvektor. Insbesondere sind die Zeilen von $M_0[S]$ linear abhängig und es folgt $\det(M_0[S]) = 0$.

Sei nun $B = (E, S)$ ein Spannbaum. Nach Bemerkung 9.2 besitzt B ein Blatt $b_1 \neq e_p$. Sei k_1 die (einzige) Kante von B , die b_1 enthält. Wir entfernen b_1 und k_1 von B und erhalten daraus einen Baum B_2 . Wir wählen ein Blatt $b_2 \neq e_p$ von B_2 und die Kante k_2 , die b_2 enthält, usw. Dies liefert eine Aufzählung b_1, \dots, b_{p-1}, e_p aller Ecken von G und $S = \{k_1, \dots, k_{p-1}\}$. Wir permutieren die Zeilen und Spalten von $M_0[S]$ gemäß dieser Reihenfolge. Man sieht leicht, dass $M_0[S]$ dann eine untere Dreiecksmatrix mit ± 1 auf der Hauptdiagonale ist. Dies zeigt $\det(M_0[S]) = \pm 1$. \square

Satz 9.14 (KIRCHHOFFS Matrix-Baum-Satz). Sei G ein zusammenhängender Graph mit p Ecken und ohne Schleifen. Für $1 \leq i \leq p$ sei L_i die Matrix, die aus $L(G)$ entsteht, indem man die i -te Zeile und i -te Spalte streicht. Dann ist $k(G) = \det L_i$.

Beweis. Sei E die Eckenmenge von G . Da $k(G)$ nicht von der Nummerierung der Ecken abhängt, können wir o. B. d. A. $i = p$ annehmen. Nach Lemma 9.10 ist $L_p = M_0 M_0^t$. Die Cauchy-Binet-Formel liefert

$$\begin{aligned} \det L_p &= \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, q\} \\ |S|=p-1}} \det(M_0[S]) \det(M_0[S]^t) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, q\} \\ |S|=p-1}} \det(M_0[S])^2 \\ &\stackrel{9.13}{=} |\{S \subseteq \{1, \dots, q\} : (E, S) \text{ ist Spannbaum von } G\}| = k(G). \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 9.15. Sei G ein beliebiger Graph und G' der Graph, der aus G entsteht, indem man Schleifen entfernt. Offenbar ist dann $k(G) = k(G')$ und $k(G) = 0$, falls G unzusammenhängend ist. Satz 9.14 erlaubt daher die Berechnung der Komplexität beliebiger Graphen.

Lemma 9.16. Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, sodass jede Zeilensumme und jede Spaltensumme von A gleich 0 ist. Sei A_i die Matrix, die aus A entsteht, indem man die i -te Zeile und i -te Spalte streicht. Dann ist der Koeffizient von x im charakteristischen Polynom $\det(A - x1_p)$ gleich $-p \det(A_i)$.

Beweis. Durch Vertauschen der i -ten und p -ten Zeile und Spalte ändern sich $\det(A)$ und $\det(A - x1_p)$ nicht. Wir können daher $i = p$ annehmen. Wir addieren die Zeilen $1, \dots, p-1$ von $A - x1_p$ auf die p -te Zeile. Die p -te Zeile wird dann zu $(-x, \dots, -x)$, da die Spaltensumme von A gleich 0 sind. Außerdem ändert sich $\det(A - x1_p)$ durch diese Elementaroperation nicht. Wir ziehen nun den Faktor $-x$ aus der letzten Zeile heraus und erhalten eine Matrix $N(x)$, deren letzte Zeile $(1, \dots, 1)$ ist (die anderen Zeilen stimmen mit $A - x1_p$ überein). Es gilt nun $\det(A - x1_p) = -x \det(N(x))$. Den konstanten Term von $\det(N(x))$ erhält man, indem man $x = 0$ setzt. Der Koeffizient von x in $\det(A - x1_p)$ ist daher $-\det(N(0))$. Wir addieren nun die Spalten $1, \dots, p-1$ von $N(0)$ zur letzten Spalte von $N(0)$. Dadurch ändert sich $\det(N(0))$ nicht und die letzte Spalte hat die Form $(0, \dots, 0, p)^t$. Der Entwicklungssatz für Determinanten zeigt $\det(N(0)) = p \det(A_p)$ wie gewünscht. \square

Folgerung 9.17. Sei G ein zusammenhängender Graph mit p Ecken und ohne Schleifen.

(i) Seien μ_1, \dots, μ_p die Eigenwerte von $L(G)$, wobei $\mu_p = 0$. Dann ist

$$k(G) = \frac{1}{p} \mu_1 \dots \mu_{p-1}.$$

(ii) Sei nun G zusätzlich regulär vom Grad d . Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ die Eigenwerte von $A(G)$ mit $\lambda_p = d$. Dann gilt

$$k(G) = \frac{1}{p} (d - \lambda_1) \dots (d - \lambda_{p-1}).$$

Beweis.

(i) Nach Bemerkung 9.9 erfüllt $L(G)$ die Voraussetzung von Lemma 9.16 und $\det(L(G)) = 0$. Daher ist tatsächlich mindestens ein Eigenwert 0. Da μ_1, \dots, μ_p die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, gilt

$$\det(L - x1_p) = (\mu_1 - x) \dots (\mu_p - x) = -(\mu_1 - x) \dots (\mu_{p-1} - x)x.$$

Der Koeffizient von x ist $-\mu_1 \dots \mu_{p-1}$. Aus Satz 9.14 und Lemma 9.16 folgt

$$k(G) = \det(L_p) = \frac{1}{p} \mu_1 \dots \mu_{p-1}.$$

(ii) Nach Lemma 9.10 gilt $\mu_i = d - \lambda_i$ für $i = 1, \dots, p$. Die Behauptung folgt daher aus (i). \square

Beispiel 9.18. Der n -Würfel $G = C_n$ ist regulär vom Grad n und hat Eigenwerte $n - 2k$ mit Vielfachheit $\binom{n}{k}$ für $k = 0, \dots, n$ nach Folgerung 2.10. Nach Folgerung 9.17 ist daher

$$k(C_n) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n (2k) \binom{n}{k} = 2^{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} - n} \prod_{k=1}^n k \binom{n}{k} = 2^{2^n - n - 1} \prod_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$$

Ein rein kombinatorischer Beweis dieser Aussage wurde erst 2012 gefunden.

Satz 9.19 (CAYLEY-Formel). Es gibt genau p^{p-2} Bäume mit Eckenmenge $\{1, \dots, p\}$.

Beweis. Die Bäume mit Ecken $\{1, \dots, p\}$ sind genau die Spannbäume des vollständigen Graphen K_p . Die Eigenwerte von K_p sind -1 mit Vielfachheit $p-1$ und $p-1$ (mit Vielfachheit 1) nach Lemma 1.13. Da K_p regulär vom Grad $p-1$ ist, folgt

$$k(K_p) = \frac{1}{p} p^{p-1} = p^{p-2}$$

aus Folgerung 9.17. \square

Zweiter Beweis (Prüfer). O. B. d. A. sei $p \geq 2$. Sei \mathcal{B}_p die Menge aller Bäume mit Eckenmenge $E := \{1, \dots, p\}$. Wir konstruieren zueinander inverse Bijektionen

$$f : \mathcal{B}_p \rightarrow E^{p-2}, \quad g : E^{p-2} \rightarrow \mathcal{B}_p.$$

Dann folgt $|\mathcal{B}_p| = |E^{p-2}| = |E|^{p-2} = p^{p-2}$ wie behauptet.

Sei $B \in \mathcal{B}_p$. Im Fall $p = 2$ sei $f(B) = \emptyset$. Anderenfalls wählen wir das Blatt b von B mit der kleinsten Nummer (existiert nach Bemerkung 9.2). Sei a_1 die (einzige) benachbarte Ecke von b . Wir entfernen b und die Kante $\{b, a_1\}$ aus B und erhalten einen Baum B_1 . Nun wiederholen wir die Prozedur mit B_1 solange bis nur noch eine Kante verbleibt. Dies liefert eine Folge $f(B) := (a_1, \dots, a_{p-2}) \in E^{p-2}$.

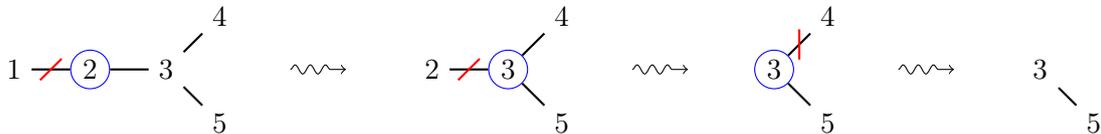
Sei nun umgekehrt $(a_1, \dots, a_{p-2}) \in E^{p-2}$ gegeben. Für $k = 1, \dots, p-2$ verbinde man die Ecken a_k und

$$b_k := \min E \setminus (\{b_1, \dots, b_{k-1}\} \cup \{a_k, \dots, a_{p-2}\})$$

mit einer Kante. Anschließend verbinden man die verbleibenden beiden Ecken in $E \setminus \{b_1, \dots, b_{p-2}\}$. Dies liefert einen Graphen $G = g(a_1, \dots, a_{p-2})$ mit $p-1$ Kanten. Da in jedem Schritt eine neue Ecke hinzukommt, hat G keine Kreise. Nach Lemma 9.4 ist G ein Baum.

Wir zeigen $g \circ f = \text{id}$ durch Induktion nach p . Dies ist klar für $p = 2$. Sei nun $p \geq 3$ und $B \in \mathcal{B}_p$ mit $f(B) = (a_1, \dots, a_{p-2})$. Sei b das kleinste Blatt von B . Angenommen es existiert $1 \leq c < b$ mit $c \notin f(B)$. Nach Wahl von b ist c kein Blatt. Daher besitzt c mindestens zwei Kanten. Da bei der Konstruktion von $f(B)$ fast alle Kanten entfernt werden, muss auch eine Kante, die c enthält, entfernt werden. Dann wäre aber $c = a_i$ für ein i . Dieser Widerspruch zeigt $b = \min E \setminus f(B) = b_1$. Die zuerst entfernte Kante $\{b, a_1\}$ ist daher genau die erste Kante, die unter g konstruiert wird. Der verbleibende Baum B_1 liefert $f(B_1) = (a_2, \dots, a_{p-2})$. Nach Induktion ist $g(f(B_1)) = B_1$ und es folgt $g \circ f = \text{id}$. Analog zeigt man $f \circ g = \text{id}$. \square

Beispiel 9.20. Die Bijektion f aus obigem Beweis nennt man *Prüfer-Code*. Im folgenden Beispiel erhält man $f(B) = (2, 3, 3)$.



Bemerkung 9.21.

- (i) Sei B ein Baum mit Ecken $1, \dots, p$ und sei d_k der Grad der Ecke k . Bei der Konstruktion des Prüfer-Codes werden $d_k - 1$ Kanten von k entfernt und jedes Mal ein k in $f(B)$ geschrieben. Anschließend ist k ein Blatt und taucht daher nicht mehr in $f(B)$ auf. Also ist $d_k - 1$ die Vielfachheit von k in $f(B)$. Die Anzahl der Bäume mit vorgegebenen Eckengraden d_1, \dots, d_p ist somit durch den *Multinomialkoeffizienten*

$$\binom{p-2}{d_1-1, \dots, d_p-1} := \frac{(p-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_p-1)!}$$

gegeben. (Es gibt $\binom{p-2}{d_1-1}$ Möglichkeiten die Einsen in $f(B)$ zu verteilen. Danach bleiben noch $\binom{p-2-d_1+1}{d_2-1}$ Möglichkeiten für die Zweien usw. Das Produkt dieser Binomialkoeffizienten ist der Multinomialkoeffizient.)

- (ii) Die Multimenge $\{d_1 - 1, \dots, d_p - 1\}$ beschreibt eine Partition von $p-2$ (wenn man Nullen weglässt) und umgekehrt gibt es zu jeder Partition von $p-2$ einen entsprechenden Baum. Isomorphe Bäume liefern offenbar die gleiche Multimenge $\{d_1, \dots, d_p\}$. Es gibt also mindestens so viele nicht-isomorphe Bäume mit p Ecken wie es Partitionen von $p-2$ gibt.

- (iii) Seien e_1, \dots, e_s die Vielfachheiten in der Multimenge $\{d_1, \dots, d_p\}$ (also $e_1 + \dots + e_s = p$). Dann kann man die Zahlen d_1, \dots, d_p auf

$$\binom{p}{e_1, \dots, e_p}$$

Weisen anordnen. Die Anzahl der Bäume, deren Eckengrade die Multimenge $\{d_1, \dots, d_p\}$ liefern ist somit

$$\binom{p-2}{d_1-1, \dots, d_p-1} \binom{p}{e_1, \dots, e_p}.$$

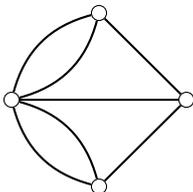
Für $p = 7$ und $\{d_1, \dots, d_7\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ erhält man

$$\binom{5}{1, 1, 1, 2} \binom{7}{3, 3, 1} = \frac{5!7!}{2!3!3!} = 5! \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 120 \cdot 70 = 8.400.$$

- (iv) Im Gegensatz zu Bemerkung 7.29 haben Erdős und Rényi bewiesen, dass fast alle Bäume symmetrisch sind. Dafür zeigten sie, dass die meisten Bäume *Kirschen* besitzen. Dies sind zwei Blätter mit gemeinsamen Nachbarn. Vertauschung dieser Blätter liefert einen nicht-trivialen Automorphismus.

10 Eulersche Graphen

Bemerkung 10.1 (Königsberger Brückenproblem). Gibt es im folgenden Graphen einen (geschlossenen) Weg, der jede Kante genau einmal besucht?



Definition 10.2.

- (i) Ein *gerichteter* Graph G ist ein Graph mit Orientierung wie in Definition 9.7. Jede Kante von G ist ein Pfeil mit Start und Ziel. Für eine Ecke e von G sei $\text{outdeg}(e)$ (bzw. $\text{indeg}(e)$) die Anzahl der Pfeile mit Start (bzw. Ziel) e . Jede Schleife trägt zu outdeg und indeg bei. Man nennt G *balanciert*, falls $\text{outdeg}(e) = \text{indeg}(e)$ für alle Ecken e gilt.
- (ii) *Wege* in G werden wie in ungerichteten Graphen definiert mit dem Unterschied, dass man nur in Pfeilrichtung gehen darf. Sind je zwei Ecken durch einen solchen Weg verbunden, so heißt G *stark zusammenhängend*. Ist G lediglich als ungerichteter Graph zusammenhängend, so nennt man G (*schwach*) *zusammenhängend*. Eine *Tour* von G ist ein geschlossener Weg, bei dem jede Kante höchstens einmal besucht wird (man denke an Stadtführung). Eine Tour heißt *eulersch*, falls jede Kante von G (genau einmal) besucht wird. Man nennt G *eulersch*, falls G eine eulersche Tour besitzt, die auch jede Ecke (möglicherweise mehrfach) besucht (also gibt es keine isolierten Punkte).

Satz 10.3. *Ein gerichteter Graph G ist genau dann eulersch, wenn G (schwach) zusammenhängend und balanciert ist.*

Beweis. Sei G eulersch und T eine eulersche Tour mit Start/Ziel e . Da T alle Ecken besucht, ist G (sogar stark) zusammenhängend. Verlässt man e auf einem Pfeil, so muss ein anderer Pfeil wieder nach e führen. Da die Tour in e endet, gilt $\text{indeg}(e) = \text{outdeg}(e)$. Jede Ecke $f \neq e$ wird auf der Tour genauso oft besucht wie verlassen (da f weder Start noch Ziel ist). Daher ist auch $\text{indeg}(f) = \text{outdeg}(f)$ und G ist balanciert.

Sei nun G zusammenhängend und balanciert. Besitzt G keine Pfeile, so besteht G nur aus einer Ecke und die leere Tour ist eulersch. Wie nehmen daher an, dass G Pfeile besitzt. Sei e eine beliebige Ecke von G . Wir zeigen zunächst, dass eine (nicht-leere) Tour mit Startpunkt e existiert. Besitzt e eine Schleife, so ist dies bereits eine Tour. Anderenfalls gilt $\text{indeg}(e) = \text{outdeg}(e) > 0$, da G zusammenhängend ist. Also führt ein Pfeil von e nach $e_1 \neq e$. Wegen $1 \leq \text{indeg}(e_1) = \text{outdeg}(e_1)$ führt ein Pfeil von e_1 nach e_2 . Im Fall $e_2 = e$ haben wir eine Tour gefunden. Anderenfalls wiederhole man das Verfahren. Nach endlich vielen Schritten wird man schließlich e erreichen. Sei nun T eine Tour in G mit größtmöglicher Anzahl von Schritten. Durch Entfernen der entsprechenden Pfeile aus G entsteht ein balancierter gerichteter Graph G' . Nehmen wir an, dass G nicht eulersch ist. Dann besitzt G' mindestens einen Pfeil. Da G zusammenhängend ist, existiert eine Ecke e aus T und ein Pfeil in G' mit Start oder Ziel e . Da G' balanciert ist, existiert ein Pfeil v mit Start e in G' . Wie eben gezeigt, existiert eine (nicht-leere) Tour T' in G' ausgehend von e und v . Man kann nun die Touren T und T' geeignet zusammensetzen (man läuft auf T bis man e erreicht, nimmt dann den Umweg über T' und läuft schließlich von e zurück zum Start von T). Dies widerspricht der Maximalität von T . Daher ist G eulersch. \square

Definition 10.4. Ein *orientierter Baum* ist ein gerichteter Graph G mit einer Ecke e , sodass für jede weitere Ecke f genau ein Weg von f nach e existiert (in Pfeilrichtung). Man nennt e *Wurzel* von G .

Bemerkung 10.5. Jeder orientierte Baum G ist offenbar schwach zusammenhängend. Jede Ecke von G , außer der Wurzel, besitzt nur einen ausgehenden Pfeil. Daher besitzt G selbst als ungerichteter Graph keine Kreise. Dies rechtfertigt die Bezeichnung Baum. Ein *orientierter Spannbaum* eines beliebigen gerichteten Graphen G ist ein orientierter Baum S mit den gleichen Ecken wie G , sodass jeder Pfeil von S auch ein Pfeil von G ist (vgl. Spannbaum). Wir wollen die Anzahl der orientierten Spannbäume von G zählen.

Satz 10.6. Sei G ein eulerscher Graph mit Eckenmenge E . Sei k ein Pfeil von G mit Start $e \in E$. Sei $\tau(G, e)$ die Anzahl der orientierten Spannbäume von G mit Wurzel e . Sei $\epsilon(G, k)$ die Anzahl der eulerschen Touren von G mit Start k . Dann gilt

$$\epsilon(G, k) = \tau(G, e) \prod_{f \in E} (\text{outdeg}(f) - 1)!.$$

Beweis. Seien $k = k_1, \dots, k_q$ die Pfeile einer eulerschen Tour T (in dieser Reihenfolge). Für $f \neq e$ sei $k(f)$ der letzte aus f startende Pfeil von T .

Behauptung: Die Pfeile $\{k(f) : f \neq e\}$ bilden einen orientierten Spannbaum B von G mit Wurzel e . Von jeder Ecke $f \neq e$ lässt sich in B nur ein Weg gehen: $f = f_1, k(f_1), f_2, k(f_2), \dots$. Angenommen es gilt $f_k = f_1$ für ein $k > 1$. Unter den Ecken f_1, \dots, f_k sei f_i die letzte Ecke, die auf T besucht wird (existiert, da T in e endet). Dann wäre das Ziel von $k(f_i)$ nicht in $\{f_1, \dots, f_k\}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass der einzige aus f führende Weg bei e enden muss.

Sei nun umgekehrt B ein orientierter Spannbaum von G mit Wurzel e . Wir verlassen e über $k_1 := k$. Anschließend gehen wir auf weiteren Pfeilen k_2, \dots, k_q , die möglichst nicht in B liegen, d. h. wir wählen nur dann einen Pfeil aus B , wenn alle anderen Pfeile an der momentanen Ecke bereits benutzt wurden.

Behauptung: Die Pfeile $T := \{k_1, \dots, k_q\}$ bilden eine eulersche Tour.

Angenommen T endet in einer Ecke f ohne bereits alle Pfeile durchlaufen zu haben. Da G balanciert ist, kann dies nur im Fall $f = e$ passieren. Insbesondere ist T in jedem Fall eine Tour. Mindestens einer der unbenutzten Pfeile muss in B liegen (anderenfalls hätte man sich irgendwann für einen Pfeil in B entschieden, obwohl noch einer außerhalb B verfügbar gewesen wäre). Sei s ein unbenutzter Pfeil aus B (also $s \in B \setminus T$), der möglichst „nah“ an e liegt (auf dem Rückweg). Sei f das Ziel von s . Angenommen $f \neq e$. Da ein unbenutzter Pfeil nach f führt, muss auch ein unbenutzter Pfeil aus f herausführen. Dieser Pfeil kann aber nicht in B liegen nach Wahl von s . Somit hat man sich auf der Tour T an Position f falsch entschieden, d. h. einen Pfeil aus B benutzt, obwohl noch ein anderer verfügbar war. Also ist $f = e$. Wieder muss ein unbenutzter Pfeil aus e herausführen. Dann kann man die Tour T aber fortsetzen. Dieser Widerspruch zeigt, dass T eulersch ist.

Wir zählen wie viele solche eulerschen Touren möglich sind. Besucht man die Ecke $f \neq e$ zum ersten Mal, so hat man $\text{outdeg}(f) - 1$ Möglichkeiten f zu verlassen, denn genau ein Pfeil aus f gehört zu B . Beim nächsten Besuch hat man noch $\text{outdeg}(f) - 2$ Möglichkeiten usw. Jedes $f \neq e$ liefert daher $(\text{outdeg}(f) - 1)!$ Möglichkeiten. Für e ist der erste Pfeil k vorgegeben. Beim nächsten Besuch von e hat man noch $\text{outdeg}(e) - 1$ Möglichkeiten, da B keinen Pfeil besitzt, der e verlässt. Also gibt es auch für $f = e$ genau $\text{outdeg}(f) - 1$ Möglichkeiten. Jeder orientierte Spannbaum mit Wurzel e liefert daher genau $\prod_{f \in E} (\text{outdeg}(f) - 1)!$ eulersche Touren mit Start k . Die Behauptung folgt. \square

Folgerung 10.7. Sei G ein eulerscher Graph mit Ecke e . Dann hängt die Anzahl $\tau(G, e)$ der orientierten Spannbäume mit Wurzel e nicht von e ab.

Beweis. Seien k_1, \dots, k_q die Pfeile einer eulerschen Tour. Offenbar ist dann auch k_2, \dots, k_q, k_1 eine eulersche Tour. Daher hängt die Anzahl $\epsilon(G, k)$ der eulerschen Touren nicht vom Startpfeil k ab. Die Behauptung folgt nun aus Satz 10.6. \square

Satz 10.8. Sei G ein gerichteter Graph mit Ecken $e_1, \dots, e_p = e$. Sei $L = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ mit

$$x_{ij} := \begin{cases} -|\{\text{Pfeile von } e_i \text{ nach } e_j\}| & \text{falls } i \neq j, \\ \text{outdeg}(e_i) - |\{\text{Schleifen an } e_i\}| & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

Sei L_p die Matrix, die aus L entsteht, indem man die letzte Zeile und letzte Spalte entfernt. Dann gilt

$$\tau(G, e) = \det L_p.$$

Beweis. Wie bei der Laplace-Matrix sind die Zeilen- und Spaltensummen von L jeweils 0 (Bemerkung 9.9). Sei zunächst G unzusammenhängend. Dann existiert eine Zusammenhangskomponente, die e nicht enthält. Die entsprechenden Zeilen von L und L_p addieren sich dann ebenfalls zum Nullvektor. Daher ist $\det(L_p) = 0$. Andererseits ist auch $\tau(G, e) = 0$.

Sei nun G zusammenhängend mit q Pfeilen. Dann ist $q \geq p - 1$ (vgl. Lemma 9.4). Wir argumentieren durch Induktion nach q . Sei $q = p - 1$. Dann ist G als ungerichteter Graph ein Baum. Nehmen wir $\text{outdeg}(f) = 0$ für eine Ecke $f \neq e$ an. Dann kann es keinen Weg von f nach e geben und folglich ist $\tau(G, e) = 0$. Andererseits ist die f -te Zeile von L_p der Nullvektor und man erhält $\det(L_p) = 0$. Sei nun $\text{outdeg}(f) > 0$ für alle $f \neq e$. Wegen $q = p - 1$ ist dann sogar $\text{outdeg}(f) = 1$ und man findet stets (genau) einen Weg von f nach e . Daher ist G ein orientierter Spannbaum und $\tau(G, e) = 1$. Wir sortieren nun die Ecken $f \neq e$ entsprechen ihrem Abstand zu e beginnend mit den Nachbarn von e . Die Determinante von L_p wird durch die entsprechende Zeilen- und Spaltenpermutation nicht verändert. Da L_p nun eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale ist, folgt $\det(L_p) = 1$ (vgl. Lemma 9.13).

Für den Induktionsschritt sei $q \geq p$. Wir können annehmen, dass kein Pfeil aus e startet, denn ein solcher Pfeil trägt nicht zu L_p bei und kann nicht Bestandteil eines orientierten Spannbaums mit Wurzel e sein. Es muss nun eine Ecke $f \neq e$ mit $\text{outdeg}(f) > 1$ geben. Sei k ein Pfeil mit Start f . Wir entfernen k und erhalten einen Graphen G_1 . Stattdessen können wir auch alle Kanten $k' \neq k$ mit Start f entfernen und erhalten daraus G_2 . Nach Induktion gilt $\tau(G_1, e) = \det(L_p(G_1))$ und $\tau(G_2, e) = \det(L_p(G_2))$. Außerdem ist $\tau(G, e) = \tau(G_1, e) + \tau(G_2, e)$, denn jeder orientierte Spannbaum von G benutzt genau einen aus f startenden Pfeil. Da die Determinante linear in den Zeilen ist, gilt ebenso $\det(L_p) = \det(L_p(G_1)) + \det(L_p(G_2))$. Dies zeigt die Behauptung. \square

Folgerung 10.9. Sei G ein eulerscher Graph mit Eckenmenge E und L, L_p wie in Satz 10.8. Sei k ein Pfeil von G . Dann gilt

$$\epsilon(G, k) = \det(L_p) \prod_{e \in E} (\text{outdeg}(e) - 1)!.$$

Sind μ_1, \dots, μ_p die Eigenwerte von L mit $\mu_p = 0$, so gilt

$$\epsilon(G, k) = \frac{1}{p} \mu_1 \dots \mu_{p-1} \prod_{e \in E} (\text{outdeg}(e) - 1)!.$$

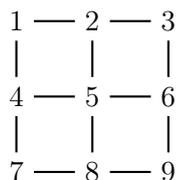
Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 10.6 und Satz 10.8. Nach Lemma 9.16 ist $-p \det(L_p)$ der Koeffizient von x im charakteristischen Polynom $\det(L(G) - x1) = (\mu_1 - x) \dots (\mu_{p-1} - x)(-x)$. Daraus folgt die zweite Behauptung. \square

Bemerkung 10.10. Wie üblich gelten die Sätze auch für L_i anstatt L_p (vgl. Satz 9.14).

Beispiel 10.11.

- (i) Sei G ein (ungerichteter) zusammenhängender Graph ohne Schleifen. Wir ersetzen jede Kante $\{e, f\}$ in G durch Pfeile (e, f) und (f, e) und erhalten daraus einen gerichteten, zusammenhängenden, balancierten Graphen \hat{G} . Nach Satz 10.3 ist \hat{G} eulersch. Sei e eine Ecke von G . Jeder Spannbaum in G wird zu einem orientierten Spannbaum in \hat{G} mit Wurzel e , indem man jeweils den Pfeil „in Richtung“ e wählt. Die Matrix L aus Satz 10.8 für \hat{G} ist genau die Laplace-Matrix $L(G)$. Daher folgt der Matrix-Baum-Satz aus Satz 10.8.

- (ii) Ein Postmann soll in folgendem Stadtviertel Post ausliefern:



Er parkt sein Auto an einer der neun Kreuzungen und geht von dort jede der Straßen genau zweimal ab (in jede Richtung einmal). Anschließend kommt er zum Auto zurück. Er beschreibt

damit eine eulersche Tour in dem gerichteten Graphen wie in (i). Für obigen Graphen gilt

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 3 & -1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 2 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 3 & -1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & -1 & 4 & -1 & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & 3 & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & 3 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind $0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6$ (ohne Beweis). Daher gibt es $\frac{1}{9}2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 6 = 2^6 \cdot 3 = 192$ Spannbäume (Folgerung 9.17). Die Anzahl der eulerschen Tour mit vorgegebenem Startpfeil ist

$$192 \prod_{i=1}^9 (\text{outdeg}(i) - 1)! = 192(2-1)!^4(3-1)!^4(4-1)! = 192 \cdot 2^4 \cdot 6 = 18.432.$$

Da \hat{G} genau 24 Pfeile besitzt, hat der Postmann $24 \cdot 18.432 = 442.368$ mögliche Routen.

Definition 10.12. Eine *binäre Folge* ist eine Folge (a_1, \dots, a_n) mit $a_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \dots, n$. Eine binäre Folge (a_1, \dots, a_{2^n}) heißt *de-Bruijn-Folge vom Grad n* , falls jede binäre Folge der Länge n als Teilfolge (a_i, \dots, a_{i+n-1}) auftritt, wobei die Indizes modulo 2^n zu lesen sind.

Bemerkung 10.13. Ist (a_1, \dots, a_{2^n}) eine de-Bruijn-Folge, so tritt jede binäre Folge der Länge n genau einmal als Teilfolge auf, denn es gibt genau 2^n solche Folgen. Offenbar sind auch die Shifts $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{2^n}, a_1, \dots, a_{i-1})$ de-Bruijn-Folgen. Wir nennen de-Bruijn-Folgen *äquivalent*, wenn sie sich nur durch einen solchen Shift unterscheiden. Dies definiert eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse enthält genau eine Folge mit $a_1 = \dots = a_n = 0$ und $a_{n+1} = 1$.

Beispiel 10.14. Bis auf Äquivalenz gibt es folgende de-Bruijn-Folgen vom Grad 1, 2, 3:

$$(0, 1), \quad (0, 0, 1, 1), \quad (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1), \quad (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1).$$

Wir wollen zählen wie viele de-Bruijn-Folgen es für jeden Grad gibt.

Definition 10.15. Der *de-Bruijn-Graph D_n* besteht aus 2^{n-1} Ecken, die durch die binären Folgen der Länge $n-1$ nummeriert sind. Zwei solche Folgen (a_1, \dots, a_{n-1}) und (b_1, \dots, b_{n-1}) sind durch einen Pfeil verbunden, falls $(a_2, \dots, a_{n-1}) = (b_1, \dots, b_{n-2})$ gilt. Man kann sich die Pfeile daher als binäre Folgen der Länge n vorstellen $(a_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})$. Die Anzahl aller Pfeile ist demnach 2^n . Es gibt genau zwei Schleifen $(0, \dots, 0)$ und $(1, \dots, 1)$.

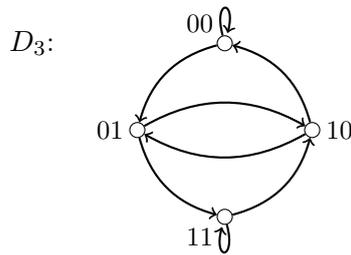
Lemma 10.16. Für je zwei Ecken a und b in D_n existiert genau ein Weg der Länge $n-1$ von a nach b . Insbesondere ist D_n stark zusammenhängend und balanciert.

Beweis. Der einzige Weg der Länge $n-1$ von a nach b ist

$$a = (a_1, \dots, a_{n-1}), (a_2, \dots, a_{n-1}, b_1), (a_3, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2), \dots, (b_1, \dots, b_{n-1}) = b.$$

Daher ist D_n stark zusammenhängend. Wegen $\text{indeg}(a) = \text{outdeg}(a) = 2$ ist D_n balanciert. \square

Beispiel 10.17.



Bemerkung 10.18. Seien k_1, \dots, k_{2^n} die Pfeile einer eulerschen Tour in D_n . Wir fassen k_i als binäre Folge der Länge n auf und definieren a_i als die letzte Ziffer von k_i (dies ist die letzte Ziffer vom Ziel von k_i). Es gilt dann $(a_i, \dots, a_{i+n-1}) = k_{i+n-1}$ für $i = 1, \dots, 2^n$. Da jede binäre Folge der Länge n in der Tour vorkommt, ist (a_1, \dots, a_{2^n}) eine de-Bruijn-Folge vom Grad n . In D_3 zum Beispiel

$$(k_1, \dots, k_8) = (001, 011, 111, 110, 101, 010, 100, 000) \rightarrow (a_1, \dots, a_8) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Ist umgekehrt eine de-Bruijn-Folge (a_1, \dots, a_{2^n}) gegeben, so erhält man eine eulersche Tour in D_n mit den Pfeilen $k_i := (a_i, \dots, a_{i+n-1})$ für $i = 1, \dots, 2^n$. Auf diese Weise entsprechen sich eulersche Touren und de-Bruijn-Folgen. Nach Satz 10.3 existiert also mindestens eine de-Bruijn-Folge vom Grad n .

Lemma 10.19. Sei $G = D_n$. Die in Satz 10.8 definierte Matrix L hat dann Eigenwert 2 mit Vielfachheit $2^{n-1} - 1$ und Eigenwert 0 (mit Vielfachheit 1).

Beweis. Sei a_{ij} die Anzahl der Pfeile von i nach j in G (also $a_{ij} \in \{0, 1\}$). Dann ist $A = (a_{ij})$ eine „gerichtete“ Adjazenzmatrix und aus Satz 1.6 und Lemma 10.16 folgt $A^{n-1} = J = (1) \in \mathbb{R}^{2^{n-1} \times 2^{n-1}}$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{2^{n-1}}$ die Eigenwerte von A . Dann sind $\lambda_1^{n-1}, \dots, \lambda_{2^{n-1}}^{n-1}$ die Eigenwerte von A^{n-1} . Die Eigenwerte von J sind andererseits 0 mit Vielfachheit $2^{n-1} - 1$ und 2^{n-1} (mit Vielfachheit 1) nach Lemma 1.12. Daher gilt $\lambda_1 = 2\zeta$ für eine $(n-1)$ -te Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ und $\lambda_2 = \dots = \lambda_{2^{n-1}} = 0$. Da G genau zwei Schleifen hat, ist $2 = \text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_{2^{n-1}}$. Dies zeigt $\lambda_1 = 2$. Wegen $L = 2 \cdot 1_{2^{n-1}} - A$ sind $0, 2, \dots, 2$ die Eigenwerte von L . \square

Satz 10.20. Es gibt genau $2^{2^{n-1}}$ de-Bruijn-Folgen vom Grad n . Bis auf Äquivalenz gibt es genau $2^{2^{n-1}-n}$ solche Folgen.

Beweis. Jede de-Bruijn-Folge, die mit n Nullen beginnt, entspricht einer eulerschen Tour in D_n mit Startpfeil $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (dies ist die Schleife an $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$). Für jede Ecke e von D_n gilt $\text{outdeg}(e) = 2$. Nach Folgerung 10.9 und Lemma 10.19 gibt es

$$\frac{1}{2^{n-1}} 2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}-n}$$

de-Bruijn-Folgen bis auf Äquivalenz. Jede solche Folge kann 2^n -mal geshiftet werden. \square

Bemerkung 10.21 (Lineares Schieberegister). Sei \mathbb{F}_{2^n} der Körper mit 2^n Elementen (Algebra 1). Bekanntlich ist die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_{2^n}^\times$ zyklisch, sagen wir $\mathbb{F}_{2^n}^\times = \langle \zeta \rangle$. Sei $\alpha = X^n + a_{n-1}X^{n-1} +$

$\dots + a_0 \in \mathbb{F}_2[X]$ das Minimalpolynom von ζ über \mathbb{F}_2 . Die Elemente $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$ bilden eine \mathbb{F}_2 -Basis von \mathbb{F}_{2^n} . Die Abbildung $\mathbb{F}_{2^n} \rightarrow \mathbb{F}_{2^n}, y \mapsto \zeta y$ ist \mathbb{F}_2 -linear mit Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{n \times n}$$

(das ist die Begleitmatrix von α). Sei nun $v := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{F}_2^n$. Angenommen es existieren $0 \leq k < l \leq 2^n - 2$ mit $vM^k = vM^l$. Dann ist $vM^{l-k} = v$ und $(M^t)^{l-k}v^t = v^t$. Also hat $(M^t)^{l-k}$ Eigenwert 1. Dann hat auch M^{l-k} Eigenwert 1 (gleiches charakteristisches Polynom). Sei $w = (w_1, \dots, w_n)^t \in \mathbb{F}_2^n \setminus \{0\}$ mit $M^{l-k}w = w$. Für $y = w_1 + w_2\zeta + \dots + w_n\zeta^{n-1}$ gilt dann $\zeta^{l-k}y = y$. Also ist $\zeta^{l-k} = 1$. Wegen $\mathbb{F}_{2^n} = \langle \zeta \rangle$ folgt der Widerspruch $2^n - 1 \leq l - k \leq 2^n - 2$. Daher sind die $2^n - 1$ Vektoren v, vM, \dots, vM^{2^n-2} paarweise verschieden und ungleich $(0, \dots, 0)$. Für $vM^k = (v_1, \dots, v_n)$ gilt außerdem $vM^{k+1} = (v_2, \dots, v_{n+1})$ mit $v_{n+1} = a_0v_1 + a_1v_2 + \dots + a_{n-1}v_n$. Indem man eine Null vorn ergänzt, erhält man eine de-Bruijn-Folge vom Grad n .

Für $n = 5$ ist jedes $\zeta \in \mathbb{F}_{32}^\times$ ein Erzeuger, denn 31 ist eine Primzahl. Daher kann man für α jedes irreduzible Polynom vom Grad 5 wählen. Man zeigt leicht, dass $\alpha = X^5 + X^2 + 1$ irreduzibel ist (keine Nullstellen und der Ansatz $\alpha = (X^3 + aX^2 + bX + 1)(X^2 + cX + 1)$ führt zu keiner Lösung). Dies liefert die de-Bruijn-Folge

$$(v_1, \dots, v_{32}) = 00000100101100111110001101110101$$

mit der Rekursionsvorschrift $v_i = v_{i-5} + v_{i-3}$ für $i = 7, \dots, 32$.

Beispiel 10.22.

- (i) Ein Zauberer lässt einen Zuschauer fünf aufeinanderfolgende Karten aus einem Stapel mit 32 Karten ziehen. Der Zuschauer verrät, an welchen der fünf Stellen sich rote Karten befinden (Herz oder Karo). Daraufhin kann der Zauberer alle fünf Karten in der richtigen Reihenfolge benennen. Die 32 Karten bilden eine de-Bruijn-Folge von Grad 5, wobei rot durch 0 und schwarz durch 1 ersetzt wird. Kennt man die binäre Folge der gezogenen Karten, so kann man deren Position im ursprünglichen Kartenstapel eindeutig identifizieren. Damit der Zauberer sich nicht die Reihenfolge aller Karten merken muss, bedient er sich folgenden Tricks: Jede Karte wird durch eine binäre Folge (a_1, \dots, a_5) codiert, wobei (a_1, a_2) die Farbe angibt ($\diamond = (0, 0)$, $\heartsuit = (0, 1)$, $\spadesuit = (1, 0)$ und $\clubsuit = (1, 1)$) und (a_3, a_4, a_5) den Wert ($7 = (1, 1, 1)$, $8 = (0, 0, 0)$, $9 = (0, 0, 1)$, \dots , Ass = $(1, 1, 0)$). Der Zauberer kann nun sofort die erste der fünf gezogenen Karten benennen. Um die anderen vier daraus abzuleiten, benutzen wir die de-Bruijn-Folge aus Bemerkung 10.21:

$$\begin{aligned} &00000100101100111110001101110101 \rightarrow \\ &8\diamond, 9\diamond, 10\diamond, D\diamond, 9\heartsuit, 10\spadesuit, K\diamond, B\heartsuit, A\spadesuit, D\heartsuit, 9\clubsuit, B\spadesuit, 7\diamond, 7\heartsuit, 7\clubsuit, A\clubsuit, \\ &D\clubsuit, 8\clubsuit, 9\spadesuit, B\diamond, A\diamond, K\heartsuit, B\clubsuit, 7\spadesuit, A\heartsuit, K\clubsuit, 10\clubsuit, K\spadesuit, 10\heartsuit, D\spadesuit, 8\heartsuit, 8\spadesuit \end{aligned}$$

Aus der ersten gezogenen Karte kann man nun leicht die verbleibenden vier nach der Rekursion $v_i = v_{i-5} + v_{i-3}$ berechnen (beachte aber, dass diese Regel nicht modulo 32 funktioniert).

- (ii) Für $n, q \geq 1$ existieren auch q -adische de-Bruijn-Folgen (a_1, \dots, a_{q^n}) mit $a_1, \dots, a_{q^n} \in \{0, \dots, q-1\}$. Sei $q = 10$. Eine Tür lässt sich mit einem 4-stelligen PIN öffnen, wobei man den PIN praktischerweise nicht (mit „ENTER“) bestätigen muss. Naiverweise kann ein Einbrecher alle 10^4 möglichen PINs probieren (ergibt 40.000 Eingaben). Einfacher ist es eine 10-adische de-Bruijn-Folge zu benutzen. Dann braucht man höchstens 10.003 Ziffern eingeben.

11 Aufgaben

Die Aufgaben mit Punkten sollten im Rahmen der Studienleistung erbracht werden.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jede n -elementige Menge genau $\binom{n+k-1}{k}$ Multimengen mit k Elementen besitzt. Leiten Sie daraus die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

ab.

Hinweis: Jede k -elementige Multimenge von $A = \{1, \dots, n\}$ lässt sich eindeutig in der Form $a_1 \leq \dots \leq a_k$ schreiben.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der vollständige Graph K_p genau $p(p-1)^l$ Wege der Länge $l \geq 1$ besitzt. Benutzen Sie dies und Satz 1.10, um einen neuen Beweis von Folgerung 1.16 zu geben.

Aufgabe 3. Sei G ein Graph mit 15 Ecken. Die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge $l \geq 1$ in G sei

$$8^l + 2 \cdot 3^l + 3 \cdot (-1)^l + (-6)^l + 5.$$

Wie verändert sich diese Anzahl, wenn man an jeder Ecke eine zusätzliche Schleife einfügt?

Aufgabe 4. Ein Graph $G = (E, K, \varphi)$ heißt *bipartit*, falls eine disjunkte Zerlegung $E = E_1 \dot{\cup} E_2$ existiert, sodass jede Kante die Form $\{e_1, e_2\}$ mit $e_1 \in E_1$ und $e_2 \in E_2$ hat. Zeigen Sie, dass die von 0 verschiedenen Eigenwerte in Paaren der Form $(\lambda, -\lambda)$ auftreten.

Aufgabe 5 (2 + 2 Punkte). Der *vollständige* bipartite Graph $K_{st} := (E, K)$ besitzt eine Zerlegung $E = E_1 \dot{\cup} E_2$ mit $K = \{\{e_1, e_2\} : e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\}$, $|E_1| = s$ und $|E_2| = t$ (keine Mehrfachkanten). Bestimmen Sie die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge l in K_{st} . Leiten Sie daraus die Eigenwerte von K_{st} ab.

Aufgabe 6. Es liegen n Münzen mit Kopf nach oben auf einem Tisch. In jedem Zug wird eine Münze zufällig und gleichverteilt gewählt und herumgedreht.

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach l Zügen alle Münzen wieder mit dem Kopf nach oben liegen?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach l Zügen alle Münzen mit dem Kopf nach unten liegen?
- In jedem Zug sollen nun gleich zwei Münzen gedreht werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach l Zügen alle Münzen wieder mit dem Kopf nach oben liegen?

Aufgabe 7 (1 + 1 + 2 + 2 Punkte). Sei $n \geq 3$ und Z_n der Graph mit Eckenmenge $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und Kanten $\{x, x+1\}$ für $x \in \mathbb{Z}_n$, wobei modulo n gerechnet wird (also $(n-1)+1=0$).

- Beschreiben Sie Z_n geometrisch.
- Bestimmen Sie die Anzahl der geschlossenen Wege in Z_n der Länge $l = 1, 2, 3, 4$.

- (c) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix A von Z_n und schreiben Sie sie in der Form $A = P + P^{-1}$ mit einer Permutationsmatrix P .
- (d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von Z_n .
Hinweis: Benutzen Sie n -te Einheitswurzeln.

Aufgabe 8. Für $x \in \mathbb{Z}_2^n$ sei $\bar{x} := x + (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_2^n$. Sei \tilde{C}_n der einfache Graph, der aus C_n entsteht, indem man die Kanten $\{x, \bar{x}\}$ für alle $x \in \mathbb{Z}_2^n$ einfügt. Bestimmen Sie die Anzahl der geschlossenen Wege in \tilde{C}_n der Länge l mit vorgegebenem Start/Ziel.

Aufgabe 9. Sei G ein zusammenhängender Graph mit $M(G)^l > 0$ für l groß genug. Seien e_1, \dots, e_p die Ecken von G und d_i der Grad von e_i . Sei $D = d_1 + \dots + d_p$. Sei $P_k(l)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Irrfahrt nach l Schritten an e_k endet. Zeigen Sie

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_k(l) = \frac{d_k}{D}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie den Spektralradius von $M(G)^l$ mit dem Satz von Perron-Frobenius.

Aufgabe 10. Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph.

- (a) Angenommen es existiert ein $l \geq 1$, sodass die Anzahl der Wege der Länge l von x nach y nicht von x, y abhängen (d. h. es gibt genauso viele Wege der Länge l von x' nach y' für beliebige Ecken x, y, x', y'). Zeigen Sie, dass die Einträge von $A(G)$ alle gleich sind.
- (b) Angenommen es existiert ein $l \geq 1$, sodass jede Irrfahrt der Länge l (mit beliebigen Startpunkt) mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder der Ecken von G endet (diese Wahrscheinlichkeit ist dann $\frac{1}{|E|}$). Zeigen Sie, dass die Einträge von $A(G)$ alle gleich sind.

Aufgabe 11. Sei $0 \leq p \leq 1$ und x eine Ecke des n -Würfels C_n . Wir betrachten eine Irrfahrt, bei der man in jedem Schritt mit Wahrscheinlichkeit p stehen bleibt und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{n}$ zu einer der n benachbarten Ecken weitergeht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nach $l \geq 0$ Schritten wieder bei x zu landen? Kontrollieren Sie Ihre Lösung für $p = 0$, $p = 1$ und $l = 1$.

Aufgabe 12. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & & & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \ddots & & & \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} & \dots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 13. Konstruieren Sie einen zusammenhängenden Graphen mit Ecken x, y , sodass $H(x, y) \neq H(y, x)$ gilt.

Aufgabe 14. Berechnen Sie $H(x, y)$ für zwei beliebige Ecken $x \neq y$ des vollständigen Graphen K_n .

Aufgabe 15 (2 + 2 Punkte). Sei L_{n+1} der einfache Graph mit Eckenmenge $E = \{0, \dots, n\}$ und Kanten $\{k, k+1\}$ für $k = 0, \dots, n-1$. Zeigen Sie $H(0, l) = k^2 + H(k, l)$ für $0 \leq k \leq l \leq n$ und leiten Sie daraus eine allgemeine Formel für $H(k, l)$ ab.

Aufgabe 16. Konstruieren Sie alle geordneten Mengen mit drei oder vier Elementen bis auf Isomorphie.

Aufgabe 17 (2 + 2 Punkte). Sei (A, \leq) eine endliche geordnete Menge und $f : A \rightarrow A$ eine Bijektion mit der Eigenschaft $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$. Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist (also $f(x) \leq f(y) \implies x \leq y$). Zeigen Sie, dass die Aussage für unendliche Mengen im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 18. Sei A die bzgl. der Teilbarkeitsrelation geordnete Menge der positiven Teiler von 24. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von A und geben Sie alle maximalen Ketten und maximalen Antiketten an. Prüfen Sie, welche der folgenden Eigenschaften A besitzt:

- graduiert,
- Rang-symmetrisch,
- Rang-unimodal,
- Sperner-Eigenschaft.

Aufgabe 19. Ein Polynom $\alpha = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ heißt

- *symmetrisch*, falls $a_i = a_{n-i}$ für $i = 0, \dots, n$ gilt.
- *unimodal*, falls $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$ für ein k gilt.

Zeigen Sie:

- Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[x]$ symmetrisch, so auch $\alpha\beta$.
- Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[x]$ symmetrisch und unimodal mit nicht-negativen Koeffizienten, so ist auch $\alpha\beta$ unimodal.

Aufgabe 20. Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine Antikette von B_n mit $|A| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Zeigen Sie

$$A \in \{(B_n)_{\lfloor n/2 \rfloor}, (B_n)_{\lceil n/2 \rceil}\}.$$

Aufgabe 21. Sei K ein Körper mit $q < \infty$ Elementen und sei $V := K^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $B_n(q)$ die bzgl. \subseteq geordnete Menge aller Untervektorräume von V .

- Zeigen Sie, dass $B_n(q)$ graduiert vom Rang n ist.

(b) Zeigen Sie

$$|(B_n(q))_k| = |\{U \leq V : \dim U = k\}| = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q - 1)} =: \binom{n}{k}_q$$

für $0 \leq k \leq n$.

(c) Zeigen Sie, dass $B_n(q)$ die Sperner-Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 22. Sei A eine endliche geordnete Menge und sei m die Länge der längsten Kette in A . Zeigen Sie, dass A eine Vereinigung von $m + 1$ Antiketten ist, aber nicht die Vereinigung von weniger Antiketten.

Aufgabe 23 (2 + 2 + 2 Punkte). Sei $G := \langle (1, 2, 3), (4, 5) \rangle \leq S_5$.

(a) Bestimmen Sie $|G|$.

(b) Nach Beispiel 5.6 operiert G auf der booleschen Algebra B_5 und auch auf dem 2-Level $(B_5)_2$. Bestimmen Sie die Bahnen von G auf $(B_5)_2$.

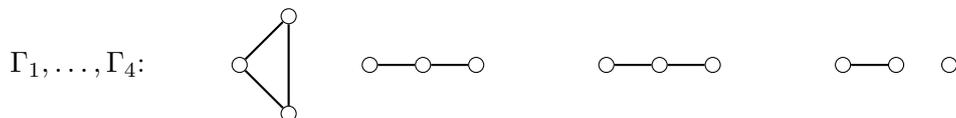
(c) Offenbar operiert G auch auf dem kartesischen Produkt $\{1, \dots, 5\} \times \{1, \dots, 5\}$ durch $\sigma(a, b) := (\sigma(a), \sigma(b))$ für $\sigma \in G$ und $1 \leq a, b \leq 5$. Bestimmen Sie die Bahnen dieser Operation.

Aufgabe 24. Zeigen Sie $\text{Aut}(B_n) \cong S_n$, wobei S_n die symmetrische Gruppe aller Permutationen $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ist.

Aufgabe 25. Sei $\alpha(x) \neq 0$ ein reelles Polynom. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) Es existiert ein reelles Polynom $\beta(x) \neq 0$, sodass alle Koeffizienten von $\alpha(x)\beta(x)$ nicht-negativ sind.
- (2) α besitzt keine positive reelle Nullstelle.

Aufgabe 26. Sei Γ ein Graph mit vier Ecken und Γ_i der Graph, der aus Γ entsteht, indem man die i -te Ecke entfernt (siehe Bemerkung 5.19). Rekonstruieren Sie den Isomorphietyp von Γ aus



Aufgabe 27. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Isomorphieklassen von Graphen mit fünf Ecken wie in Beispiel 5.18.

Aufgabe 28 (4 Punkte). Konstruieren Sie eine geordnete Menge A , die die Sperner-Eigenschaft besitzt und eine Gruppe $G \leq \text{Aut}(A)$, sodass A/G graduiert ist, aber *nicht* die Sperner-Eigenschaft besitzt. *Hinweis:* Konstruieren Sie zunächst A/G und danach A und G .

Aufgabe 29. Sei G eine Gruppe, die auf einer endlichen Menge Ω operiert. Angenommen G operiert transitiv auf $\binom{\Omega}{k}$ für ein $k \leq n/2$. Zeigen Sie, dass G auch transitiv auf $\binom{\Omega}{l}$ operiert für alle $l \leq k$.

Aufgabe 30. Zeigen Sie, dass eine Folge von positiven reellen Zahlen $a = (a_0, \dots, a_n)$ genau dann log-konkav ist, wenn $a_i a_j \geq a_{i-1} a_{j+1}$ für alle $1 \leq i \leq j \leq n-1$ gilt.

Aufgabe 31. Ein reelles Polynom $\alpha(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ heißt *log-konkav*, falls (a_0, \dots, a_n) log-konkav ist. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[x]$ log-konkav mit lauter positiven Koeffizienten. Zeigen Sie, dass $\alpha\beta$ log-konkav ist und positive Koeffizienten hat.

Aufgabe 32 (4 Punkte). Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $c(m, n)$ die Anzahl der Paare (λ, μ) aus $L(m, n)$ mit $\lambda \prec \mu$. Zeigen Sie

$$c(m, n) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!}.$$

Hinweis: Fallunterscheidung nach μ_1 .

Aufgabe 33. Konstruieren Sie einen expliziten Monomorphismus $L(2, n)_k \rightarrow L(2, n)_{k+1}$ für $k < n$.

Aufgabe 34. Eine Partition λ von $n \in \mathbb{N}$ heißt *symmetrisch*, falls $\lambda' = \lambda$. Zeigen Sie:

(a) Die Anzahl der Partitionen von n in ungleiche Teile ist gleich der Anzahl der Partitionen in ungerade Teile.

Hinweis: Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig in der Form $2^k m$ mit ungeradem m schreiben.

(b) Die Anzahl der symmetrischen Partition von n ist gleich die Anzahl der Partitionen in ungleiche, ungerade Teile.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Bijektion mittels des Young-Diagramms.

Aufgabe 35. Sei μ eine beliebige Partition und Y_μ die geordnete Menge aller Partitionen $\lambda \leq \mu$.

(a) Ist Y_μ stets Rang-symmetrisch?

(b) Ist Y_μ stets Rang-unimodal?

Hinweis: Benutzen Sie einen Computer.

Aufgabe 36. Sei X eine endliche Menge und $G \leq \text{Sym}(X)$. Sei $f(n)$ die Anzahl der nicht-äquivalenten Färbungen von X mit n Farben. Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/n^{|X|}$.

Aufgabe 37 (4 Punkte). Wie viele Möglichkeiten gibt es die 12 Seiten eines Dodekaeders mit n Farben zu bemalen?

Hinweis: $|G| = 60$.

Aufgabe 38. Berechnen Sie den Zyklenindikator von

$$Q_8 := \langle (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8), (1, 5, 3, 7)(2, 8, 4, 6) \rangle \leq S_8.$$

Aufgabe 39. Konstruieren Sie nicht-isomorphe Gruppen $G, H \leq S_n$ mit $Z_G = Z_H$.

Hinweis: Wählen Sie für G die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\text{GL}(3, 3)$ mit Einsen auf der Hauptdiagonale.

Aufgabe 40. Sei X eine endliche Menge und $G \leq \text{Sym}(X)$. Die Anzahl der nicht-äquivalenten Färbungen von X mit n Farben sei

$$f(n) = \frac{1}{a} (n^p + bn^{p-2} + \dots + (p-1)n),$$

wobei p eine Primzahl ist.

- Bestimmen Sie $|X|$, $|G|$ und die Anzahl der Transpositionen von G .
- Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen von G auf X .
- Zeigen Sie, dass G keine nicht-abelsche einfache Gruppe sein kann. (Eine Gruppe $G \neq 1$ heißt *einfach*, falls 1 und G die einzigen Normalteiler von G sind).

Aufgabe 41. Wie viele Halsketten (Beispiel 7.11) gibt es aus genau n roten und n blauen Perlen?

Aufgabe 42. Sei $N(l, n)$ die Anzahl der Halsketten mit l Perlen in n Farben, die keinerlei Rotations-symmetrie aufweisen. Zeigen Sie

$$N(l, n) = \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu(d) n^{l/d}.$$

Dabei ist die *Möbius-Funktion* μ definiert durch

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^s & \text{falls } n = p_1 \dots p_s \text{ mit paarweise verschiedenen Primzahlen } p_1, \dots, p_s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 43.

- (4 Punkte) Finden Sie eine Formel für die Anzahl der Permutationen in S_n , die ausschließlich aus Zyklen gerader Länge bestehen.
- Finden Sie eine Formel für die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in S_n der Ordnung 2.
- Finden Sie eine Formel für die Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen in S_n .
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig und gleichverteilt gewählte Permutation in S_n fixpunktfrei ist?

Aufgabe 44. Sei $G \leq S_n$ mit n oder $|G|$ ungerade. Zeigen Sie, dass B_n/G genauso viele Elemente mit geradem Rang wie mit ungeradem Rang enthält.

Aufgabe 45.

- Konstruieren Sie alle Young-Tableaux der Form $\lambda = (4, 2)$.
- Berechnen Sie $f^{(n,n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit der Hakenformel.
- Wie viele maximale Ketten besitzt die geordnete Menge $L(4, 4)$?

Aufgabe 46 (4 Punkte). Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} f^{(n-k,k)} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 47. Sei $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Hinweis: Schreiben Sie die rechte Seite als Potenzreihe.

(b) Interpretieren Sie die Koeffizienten der (ausmultiplizierten) Potenzreihe

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k).$$

Aufgabe 48. Sei $\lambda \vdash n$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der ungeraden Hakenlängen minus die Anzahl der geraden Hakenlängen die Form $\binom{k}{2}$ hat für ein $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 49. Bestimmen Sie die Anzahl der Hasse-Wege von \emptyset nach $\lambda = (4, 3^2, 1)$ vom Typ $w = U^7 D^4 U^6 D U^3$.

Aufgabe 50. Benutzen Sie Halsketten, um den kleinen Satz von Fermat zu beweisen: $a^p \equiv a \pmod{p}$ für jede Primzahl p und $a \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 51. Sei $c(\lambda)$ die Anzahl der verschiedenen Teile einer Partition λ . Zeigen Sie

$$\sum_{\lambda \vdash n} c(\lambda) = p(0) + \dots + p(n-1).$$

Aufgabe 52 (3 Punkte). Schreiben Sie $D^3 U^3$ in der Form $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij} U^i D^j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Kontrollieren Sie Ihre Lösung durch $D^3 U^3(\emptyset)$.

Aufgabe 53. Sei $b_2(n)$ die Anzahl der Einsen in der Binärdarstellung von $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass unter den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $k = 0, \dots, n$ genau $2^{b_2(n)}$ ungerade Zahlen auftreten.

Aufgabe 54.

(a) Sei $\lambda \vdash n$. Zeigen Sie

$$\sum_{\mu \triangleright \lambda} f^\mu = (n+1)f^\lambda.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $y(n) := \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda$. Zeigen Sie $y(n+1) = y(n) + ny(n-1)$ für $n \geq 2$.

(c) Zeigen Sie, dass $y(n)$ die Anzahl der Permutationen $\pi \in S_n$ mit $\pi^2 = 1$ ist.

Aufgabe 55. Bestimmen Sie alle Bäume mit sechs Ecken bis auf Isomorphie.

Aufgabe 56 (4 Punkte). Sei $p \geq 2$ und G der Graph, der aus dem vollständigen Graphen K_p entsteht, indem man eine Kante entfernt. Bestimmen Sie die Komplexität von G .

Hinweis: Benutzen Sie $k(K_p) = p^{p-2}$.

Aufgabe 57. Sei $G := K_{st}$ der vollständige bipartite Graph (siehe Aufgabe 5) und $L := L(G)$.

- (a) Finden Sie obere Schranken für $\text{rg}(L - s1)$ und $\text{rg}(L - t1)$.
- (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von L .
- (c) Berechnen Sie $k(G)$.

Aufgabe 58. Sei G ein Graph und G' der Graph, der aus G entsteht, indem man eine Ecke hinzufügt und diese mit allen Ecken von G verbindet. Drücken Sie $k(G')$ durch die Eigenwerte von $L(G)$ aus.

Aufgabe 59. Sei G ein Graph ohne Schleifen. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ und $\lambda_p = 0$ die Eigenwerte von $L := L(G)$. Sei J die Matrix, die nur aus Einsen besteht und $\alpha \in \mathbb{R}$.

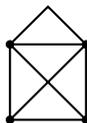
- (a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, p\alpha$ die Eigenwerte von $L + \alpha J$ sind.
- (b) Wir fügen zwischen je zwei verschiedenen Ecken von G eine Kante ein und erhalten dadurch einen Graphen G' . Berechnen Sie $k(G')$ aus $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$.
- (c) Sei nun $G = (E, K)$ einfach und $\overline{G} = (E, \overline{K})$ der komplementäre Graph mit Kantenmenge $\overline{K} = \binom{E}{2} \setminus K$. Berechnen Sie $k(\overline{G})$ aus $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$.

Aufgabe 60. Ein Kreis K eines Graphen G heißt *hamiltonsch*, falls jede Ecke von G genau einmal in K vorkommt (außer Start/Ziel). Zeigen Sie, dass der vollständige Graph K_n und der n -Würfel C_n hamiltonsche Kreise besitzen.

Aufgabe 61. Bestimmen Sie die Bäume mit Prüfer-Code $(1, 2, 2, 3, 3, 3)$, $(1, 2, \dots, n)$ und $(1, 1, \dots, 1)$.

Aufgabe 62. Beantworten Sie das Königsberger Brückenproblem aus der Vorlesung sowohl für geschlossene Wege als auch für beliebige Wege (die jede Kante genau einmal besuchen).

Aufgabe 63. Wie viele Möglichkeiten gibt es das „Haus vom Nikolaus“ zu zeichnen?



Dabei gelten die Regeln: Der Stift darf nicht abgesetzt werden. Jede Kante muss genau einmal gezeichnet werden. Kann man mit den gleichen Regeln zwei Häuser zeichnen?

