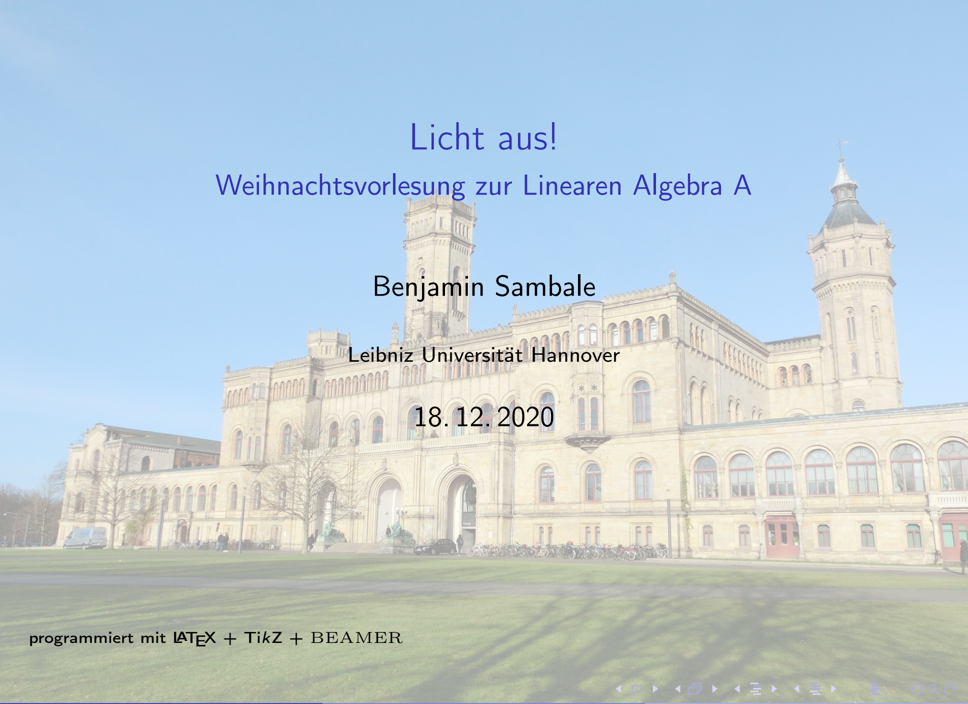


Licht aus!

Weihnachtsvorlesung zur Linearen Algebra A

Benjamin Sambale

Leibniz Universität Hannover

18. 12. 2020

programmiert mit LaTeX + TikZ + BEAMER

Situation

- Sie bewohnen ein Schloss mit 25 Zimmern.

Situation

- Sie bewohnen ein Schloss mit 25 Zimmern.
- Beim Zubettgehen stellen Sie fest, dass in der Küche und im Bad noch Licht brennt.

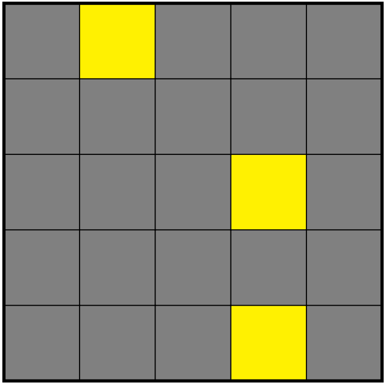
Situation

- Sie bewohnen ein Schloss mit 25 Zimmern.
- Beim Zubettgehen stellen Sie fest, dass in der Küche und im Bad noch Licht brennt.
- Der Hausmeister hat Ihnen einen Streich gespielt: alle Lichtschalter sind gekoppelt!

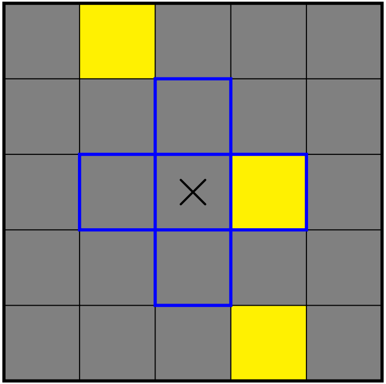
Situation

- Sie bewohnen ein Schloss mit 25 Zimmern.
- Beim Zubettgehen stellen Sie fest, dass in der Küche und im Bad noch Licht brennt.
- Der Hausmeister hat Ihnen einen Streich gespielt: alle Lichtschalter sind gekoppelt!
- Beim Betätigen eines Lichtschalters werden auch die Lichter der benachbarten Räume an/aus geschaltet.

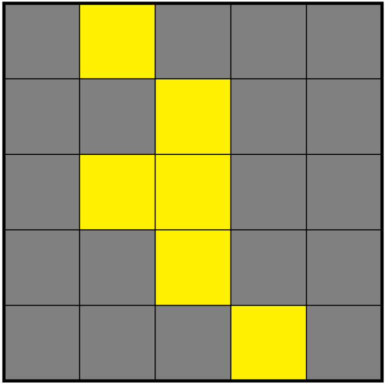
Los geht's!



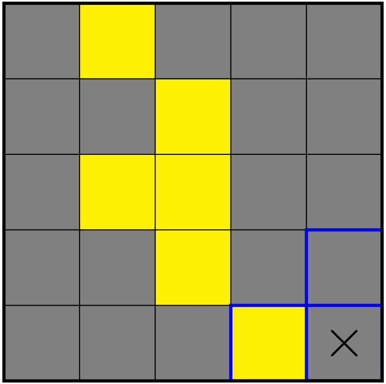
Los geht's!



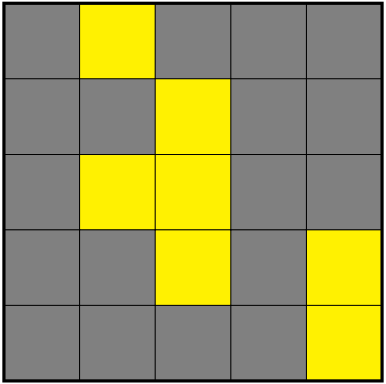
Los geht's!



Los geht's!



Los geht's!



Ausprobieren: `https://www.xarg.org/project/lightsout/`

Fragen

1. Kann man alle Lichter ausschalten?

Fragen

1. Kann man alle Lichter ausschalten?
2. Wenn ja, welche Schalter muss man dafür betätigen?

Fragen

1. Kann man alle Lichter ausschalten?
2. Wenn ja, welche Schalter muss man dafür betätigen?
3. Ist die Lösung eindeutig?

Fragen

1. Kann man alle Lichter ausschalten?
2. Wenn ja, welche Schalter muss man dafür betätigen?
3. Ist die Lösung eindeutig?
4. Wenn nein, welche Lösung benötigt am wenigstens Schaltungen?

Fragen

1. Kann man alle Lichter ausschalten?
2. Wenn ja, welche Schalter muss man dafür betätigen?
3. Ist die Lösung eindeutig?
4. Wenn nein, welche Lösung benötigt am wenigsten Schaltungen?

Lösung

Lineare Algebra über $\mathbb{F}_2$!

Beobachtungen

- Es spielt keine Rolle in welcher Reihenfolge die Schalter betätigt werden.

Beobachtungen

- Es spielt keine Rolle in welcher Reihenfolge die Schalter betätigt werden.
- Jeder Schalter braucht höchstens einmal betätigt werden.

Beobachtungen

- Es spielt keine Rolle in welcher Reihenfolge die Schalter betätigt werden.
- Jeder Schalter braucht höchstens einmal betätigt werden.
- Zwei Möglichkeiten für jeden Schalter. Insgesamt

$$2^{25}$$

Beobachtungen

- Es spielt keine Rolle in welcher Reihenfolge die Schalter betätigt werden.
- Jeder Schalter braucht höchstens einmal betätigt werden.
- Zwei Möglichkeiten für jeden Schalter. Insgesamt

$$2^{25} = 2^5 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$$

Beobachtungen

- Es spielt keine Rolle in welcher Reihenfolge die Schalter betätigt werden.
- Jeder Schalter braucht höchstens einmal betätigt werden.
- Zwei Möglichkeiten für jeden Schalter. Insgesamt

$$2^{25} = 2^5 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} > 32 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 32\,\text{Mio.}$$

Möglichkeiten.

Beobachtungen

- Es spielt keine Rolle in welcher Reihenfolge die Schalter betätigt werden.
- Jeder Schalter braucht höchstens einmal betätigt werden.
- Zwei Möglichkeiten für jeden Schalter. Insgesamt

  $$2^{25} = 2^5 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} > 32 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 32\,\text{Mio.}$$

  Möglichkeiten. Raten zwecklos! ☹

Gleichungssystem

Gegeben: Zustandsvektor $b = (b_1, \ldots, b_{25})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}$ mit

$$b_i = 1 \iff \text{Licht brennt in Zimmer } i.$$

Gleichungssystem

Gegeben: Zustandsvektor $b = (b_1, \ldots, b_{25})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}$ mit

$$b_i = 1 \iff \text{Licht brennt in Zimmer } i.$$

Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}_2^{25\times 25}$ mit

$$a_{ij} = 1 \iff \text{Schalter } j \text{ schaltet Zimmer } i.$$

Gleichungssystem

Gegeben: Zustandsvektor $b = (b_1, \ldots, b_{25})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}$ mit

$$b_i = 1 \iff \text{Licht brennt in Zimmer } i.$$

Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}_2^{25\times 25}$ mit

$$a_{ij} = 1 \iff \text{Schalter } j \text{ schaltet Zimmer } i.$$

Gesucht: Lösungsvektor $x = (x_1, \ldots, x_{25})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}$ mit $Ax = b$.

Begründung

- Die Gleichung $Ax = b$ besagt

$$\sum_{j=1}^{25} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, 25).$$

Begründung

- Die Gleichung $Ax = b$ besagt

$$\sum_{j=1}^{25} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, 25).$$

- Dabei gilt

$$a_{ij} x_j = 1 \iff a_{ij} = 1 = x_j.$$

Begründung

- Die Gleichung $Ax = b$ besagt

$$\sum_{j=1}^{25} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, \dots, 25).$$

- Dabei gilt

$$a_{ij}x_j = 1 \iff a_{ij} = 1 = x_j.$$

- Die Summe $\sum a_{ij}x_j$ beschreibt also den Effekt, wenn die Schalter j mit $x_j = 1$ betätigt werden:

$$\sum_{j=1}^{25} a_{ij}x_j = 1 \iff \text{Licht in Zimmer } i \text{ wird ein/aus geschaltet.}$$

Begründung

- Addition mit b_i ergibt

$$b_i + \sum_{j=1}^{25} a_{ij}x_j = b_i + b_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 25).$$

Begründung

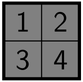
- Addition mit b_i ergibt

$$b_i + \sum_{j=1}^{25} a_{ij} x_j = b_i + b_i = 0 \qquad (i = 1, \dots, 25).$$

- Das Schalten der $x_j = 1$ überführt daher den Zustand b in den „Aus"-Zustand $(0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}$ wie gewünscht!

Kleines Beispiel

- Betrachten wir zunächst nur vier Zimmer:



Kleines Beispiel

- Betrachten wir zunächst nur vier Zimmer:

1	2
3	4

- Schalter 1 schaltet Zimmer $1, 2, 3$. Schalter 2 schaltet Zimmer $1, 2, 4$ usw. Daher:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kleines Beispiel

- Die Schalter $1+3$ bewirken:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Kleines Beispiel

- Die Schalter $1+3$ bewirken:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Kontrolle:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \times & 2 \\ \hline \times & 4 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Jetzt 25 Zimmer

$$A = \begin{pmatrix}
1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&1&1&.&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
1&.&.&.&.&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&.&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&.&.&1&.&.&.&.&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&.&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&.&.&.&.&1&.&.&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&.&1&1&.&.&.&1&.&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&.&.&1&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&.&.&.&.&1 \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&.&1&1&.&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&.&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1&. \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1&1 \\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&1&1
\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{25\times 25}$$

Jetzt 25 Zimmer

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1
\end{array}\right) \in \mathbb{F}_2^{25\times 25}$$

Computer sagt: $\operatorname{Rang}(A) = 23$

Jetzt 25 Zimmer

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1
\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{25\times 25}$$

Computer sagt: $\mathrm{Rang}(A) = 23 < 25.$

Fazit

- Gleichungssystem $Ax = b$ nicht immer lösbar!

Fazit

- Gleichungssystem $Ax = b$ nicht immer lösbar!
- Falls lösbar, hat die Lösungsmenge die Form

$$L = \widetilde{x} + L_0 \qquad \text{(Satz 6.6)},$$

wobei $\widetilde{x}$ eine spezielle Lösung ist und L_0 die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.

Fazit

- Gleichungssystem $Ax = b$ nicht immer lösbar!
- Falls lösbar, hat die Lösungsmenge die Form

$$L = \widetilde{x} + L_0 \qquad \text{(Satz 6.6)},$$

  wobei $\widetilde{x}$ eine spezielle Lösung ist und L_0 die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.
- Dabei gilt $\dim(L_0) = n - \mathrm{Rang}(A) = 25 - 23 = 2$.

Fazit

- Gleichungssystem $Ax = b$ nicht immer lösbar!
- Falls lösbar, hat die Lösungsmenge die Form

$$L = \widetilde{x} + L_0 \qquad \text{(Satz 6.6)},$$

  wobei $\widetilde{x}$ eine spezielle Lösung ist und L_0 die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.
- Dabei gilt $\dim(L_0) = n - \mathrm{Rang}(A) = 25 - 23 = 2$.
- Ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ besitzt genau 4 Vektoren (Koordinatendarstellung eines Vektors hat zwei freie Parameter).

Fazit

- Gleichungssystem $Ax = b$ nicht immer lösbar!
- Falls lösbar, hat die Lösungsmenge die Form

$$L = \widetilde{x} + L_0 \qquad \text{(Satz 6.6)},$$

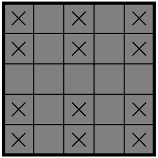
  wobei $\widetilde{x}$ eine spezielle Lösung ist und L_0 die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.
- Dabei gilt $\dim(L_0) = n - \mathrm{Rang}(A) = 25 - 23 = 2$.
- Ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ besitzt genau 4 Vektoren (Koordinatendarstellung eines Vektors hat zwei freie Parameter).
- Also $|L| \in \{0, 4\}$.

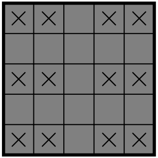
Fazit

- Gleichungssystem $Ax = b$ nicht immer lösbar!
- Falls lösbar, hat die Lösungsmenge die Form
$$L = \widetilde{x} + L_0 \qquad \text{(Satz 6.6)},$$
wobei $\widetilde{x}$ eine spezielle Lösung ist und L_0 die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.
- Dabei gilt $\dim(L_0) = n - \mathrm{Rang}(A) = 25 - 23 = 2$.
- Ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ besitzt genau 4 Vektoren (Koordinatendarstellung eines Vektors hat zwei freie Parameter).
- Also $|L| \in \{0, 4\}$.
- Daraus folgt
$$|\{Ax : x \in \mathbb{F}_2^{25}\}| = \frac{|\mathbb{F}_2^{25}|}{4} = 2^{23},$$
das heißt, nur ein Viertel aller Zustände ist lösbar.

Lösungsmenge

- Der Raum L_0 wird von folgenden Schaltungen aufgespannt:

v: 

w : 

(diese bewirken nichts).

Lösungsmenge

- Der Raum L_0 wird von folgenden Schaltungen aufgespannt:

v:

×		×		×
×		×		×
×		×		×
×		×		×

w :

×	×		×	×
×	×		×	×
×	×		×	×

(diese bewirken nichts).

- Für eine Lösung $\widetilde{x}$ von $Ax = b$ gilt daher

$$L = \{\widetilde{x},\ \widetilde{x} + v,\ \widetilde{x} + w,\ \widetilde{x} + v + w\}.$$

Optimale Lösung

- Die Schaltungen v und w benötigen jeweils 12 Schalter und überschneiden sich an den vier Ecken.

Optimale Lösung

- Die Schaltungen v und w benötigen jeweils 12 Schalter und überschneiden sich an den vier Ecken.
- Daher benötigt $v + w$ genau $12 + 12 - 4 = 20$ Schalter.

Optimale Lösung

- Die Schaltungen v und w benötigen jeweils 12 Schalter und überschneiden sich an den vier Ecken.
- Daher benötigt $v + w$ genau $12 + 12 - 4 = 20$ Schalter.
- Benötigt $\widetilde{x}$ genau s Schalter, so überschneiden sich $\widetilde{x}$ und $v + w$ an mindestens $s - 5$ Schaltern.

Optimale Lösung

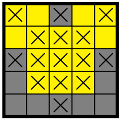
- Die Schaltungen v und w benötigen jeweils 12 Schalter und überschneiden sich an den vier Ecken.
- Daher benötigt $v + w$ genau $12 + 12 - 4 = 20$ Schalter.
- Benötigt $\widetilde{x}$ genau s Schalter, so überschneiden sich $\widetilde{x}$ und $v + w$ an mindestens $s - 5$ Schaltern.
- Also benötigt $\widetilde{x} + v + w$ höchstens $25 - (s - 5) = 30 - s$ Schalter.

Optimale Lösung

- Die Schaltungen v und w benötigen jeweils 12 Schalter und überschneiden sich an den vier Ecken.
- Daher benötigt $v + w$ genau $12 + 12 - 4 = 20$ Schalter.
- Benötigt $\widetilde{x}$ genau s Schalter, so überschneiden sich $\widetilde{x}$ und $v + w$ an mindestens $s - 5$ Schaltern.
- Also benötigt $\widetilde{x} + v + w$ höchstens $25 - (s - 5) = 30 - s$ Schalter.
- Eine der beiden Lösungen $\widetilde{x}$ oder $\widetilde{x} + v + w$ benötigt daher höchstens 15 Schalter.

Optimale Lösung

- Die Schaltungen v und w benötigen jeweils 12 Schalter und überschneiden sich an den vier Ecken.
- Daher benötigt $v+w$ genau $12+12-4=20$ Schalter.
- Benötigt $\widetilde{x}$ genau s Schalter, so überschneiden sich $\widetilde{x}$ und $v+w$ an mindestens $s-5$ Schaltern.
- Also benötigt $\widetilde{x}+v+w$ höchstens $25-(s-5)=30-s$ Schalter.
- Eine der beiden Lösungen $\widetilde{x}$ oder $\widetilde{x}+v+w$ benötigt daher höchstens 15 Schalter.
- Umgekehrt gibt es Zustände, die tatsächlich 15 Schalter benötigen:



In der Praxis

- Wie findet man $\widetilde{x}$?

In der Praxis

- Wie findet man $\widetilde{x}$? Gauß-Algorithmus??

In der Praxis

- Wie findet man $\widetilde{x}$? Gauß-Algorithmus?? Och, nöö!

In der Praxis

- Wie findet man $\widetilde{x}$? Gauß-Algorithmus?? Och, nöö!
- Einfacher: Betätige Schalter in der zweiten Zeile, sodass alle Lichter in der ersten Zeile gelöscht werden.

In der Praxis

- Wie findet man $\widetilde{x}$? Gauß-Algorithmus?? Och, nöö!
- Einfacher: Betätige Schalter in der zweiten Zeile, sodass alle Lichter in der ersten Zeile gelöscht werden.
- Betätige Schalter in der dritten Zeile, sodass alle Lichter in der zweiten Zeile gelöscht werden usw.

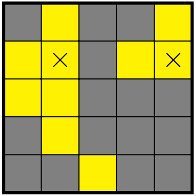
In der Praxis

- Wie findet man $\widetilde{x}$? Gauß-Algorithmus?? Och, nöö!
- Einfacher: Betätige Schalter in der zweiten Zeile, sodass alle Lichter in der ersten Zeile gelöscht werden.
- Betätige Schalter in der dritten Zeile, sodass alle Lichter in der zweiten Zeile gelöscht werden usw.
- Am Ende brennen nur noch Lichter in der letzten Zeile.

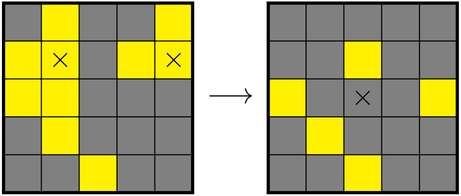
In der Praxis

- Wie findet man $\widetilde{x}$? Gauß-Algorithmus?? Och, nöö!
- Einfacher: Betätige Schalter in der zweiten Zeile, sodass alle Lichter in der ersten Zeile gelöscht werden.
- Betätige Schalter in der dritten Zeile, sodass alle Lichter in der zweiten Zeile gelöscht werden usw.
- Am Ende brennen nur noch Lichter in der letzten Zeile.
- Dafür gibt es $2^5 = 32$ Möglichkeiten, von denen nur $\frac{1}{4}32 = 8$ lösbar sind.

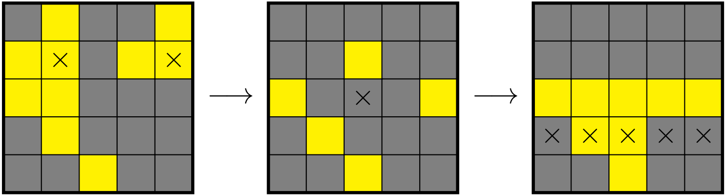
Beispiel



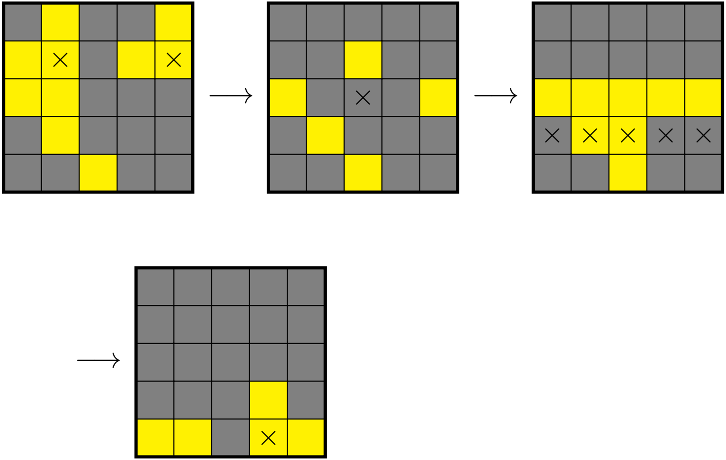
Beispiel



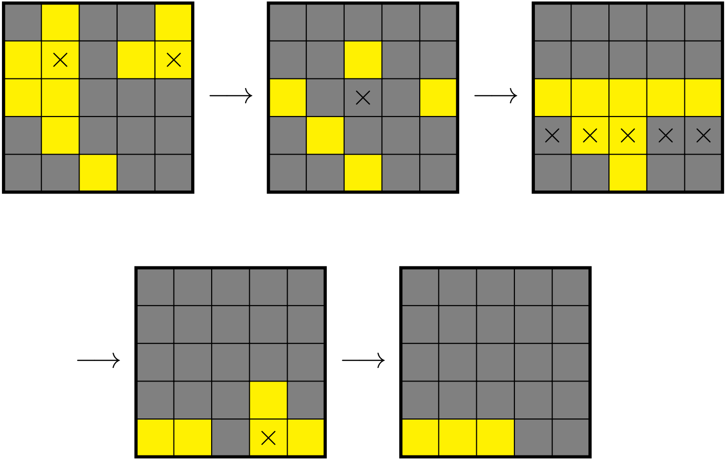
Beispiel



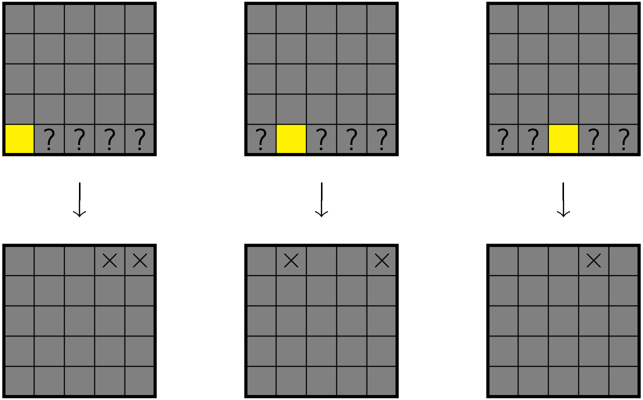
Beispiel



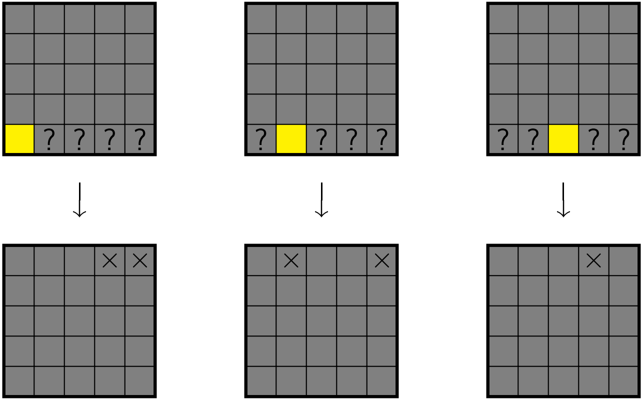
Beispiel



Merkregel

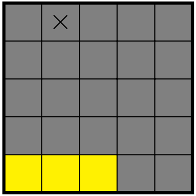


Merkregel

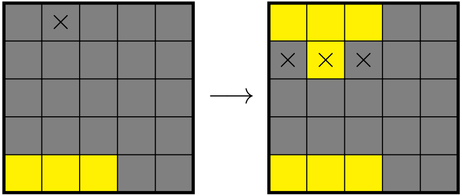


Anschließend betätige man wieder die Schalter in Zeile 2, 3, 4 und 5.
Am Ende sind alle Lichter aus oder der Zustand ist nicht lösbar.

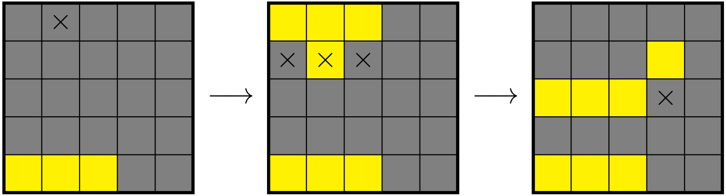
Beispiel fortgesetzt



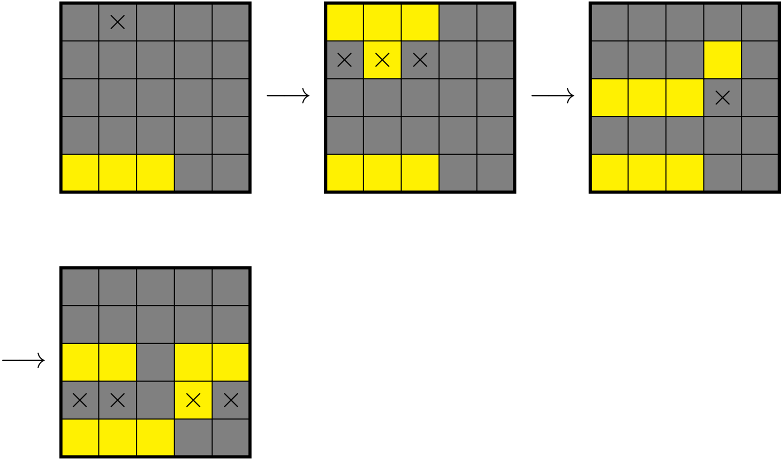
Beispiel fortgesetzt



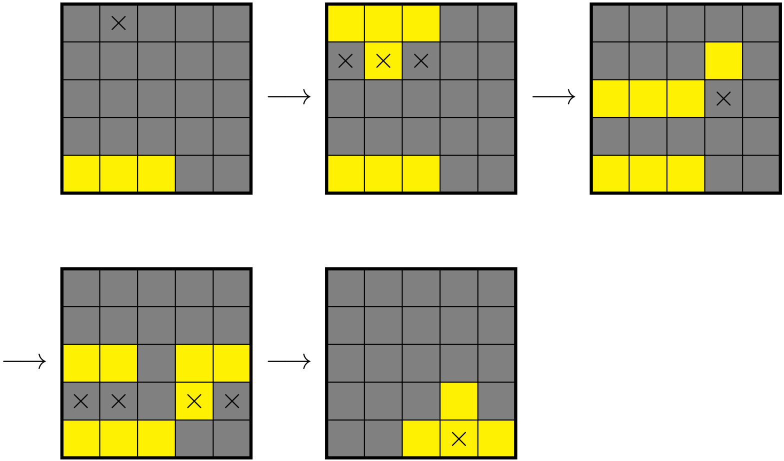
Beispiel fortgesetzt



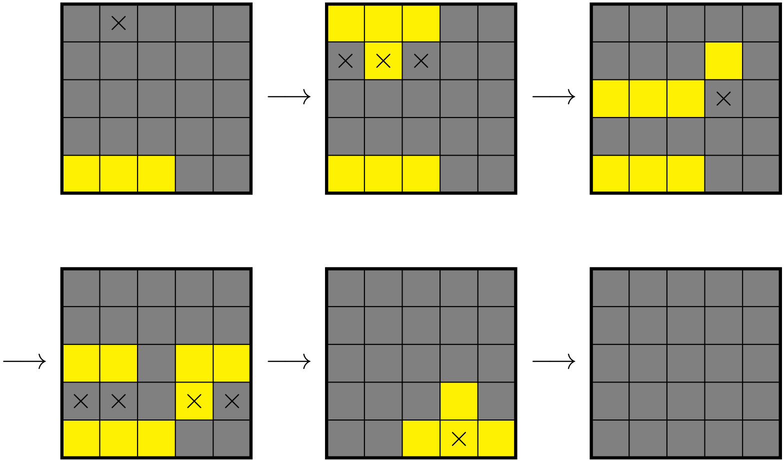
Beispiel fortgesetzt



Beispiel fortgesetzt



Beispiel fortgesetzt



Lösbarkeit

Wie erkennt man, ob ein Zustand lösbar ist?

Lösbarkeit

Wie erkennt man, ob ein Zustand lösbar ist?

Satz

Ein Zustand b ist genau dann lösbar, wenn $v^{\mathrm{t}}b = 0 = w^{\mathrm{t}}b$.

Lösbarkeit

Wie erkennt man, ob ein Zustand lösbar ist?

Satz

Ein Zustand b ist genau dann lösbar, wenn $v^{\mathrm{t}}b = 0 = w^{\mathrm{t}}b$.

Beweis.

Die lösbaren Zustände bilden den Raum $U := \{Ax : x \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}\}$ der Dimension 23.

Lösbarkeit

Wie erkennt man, ob ein Zustand lösbar ist?

Satz

Ein Zustand b ist genau dann lösbar, wenn $v^{\mathrm{t}}b = 0 = w^{\mathrm{t}}b$.

Beweis.

Die lösbaren Zustände bilden den Raum $U := \{Ax : x \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}\}$ der Dimension 23. Wegen $A^{\mathrm{t}} = A$ gilt dabei

$$v^{\mathrm{t}}Ax = v^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}x = (Av)^{\mathrm{t}}x = 0 = (Aw)^{\mathrm{t}}x = w^{\mathrm{t}}Ax.$$

Lösbarkeit

Wie erkennt man, ob ein Zustand lösbar ist?

Satz

Ein Zustand b ist genau dann lösbar, wenn $v^{\mathrm{t}}b = 0 = w^{\mathrm{t}}b$.

Beweis.

Die lösbaren Zustände bilden den Raum $U := \{Ax : x \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}\}$ der Dimension 23. Wegen $A^{\mathrm{t}} = A$ gilt dabei

$$v^{\mathrm{t}}Ax = v^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}x = (Av)^{\mathrm{t}}x = 0 = (Aw)^{\mathrm{t}}x = w^{\mathrm{t}}Ax.$$

Dies zeigt $U \subseteq \left\{c \in \mathbb{F}_2^{25\times 1} : \left(\begin{smallmatrix} v^{\mathrm{t}} \\ w^{\mathrm{t}} \end{smallmatrix}\right)c = 0\right\} =: W$.

Lösbarkeit

Wie erkennt man, ob ein Zustand lösbar ist?

Satz

Ein Zustand b ist genau dann lösbar, wenn $v^{\mathrm{t}} b = 0 = w^{\mathrm{t}} b$.

Beweis.

Die lösbaren Zustände bilden den Raum $U := \{Ax : x \in \mathbb{F}_2^{25\times 1}\}$ der Dimension 23. Wegen $A^{\mathrm{t}} = A$ gilt dabei

$$v^{\mathrm{t}} Ax = v^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}} x = (Av)^{\mathrm{t}} x = 0 = (Aw)^{\mathrm{t}} x = w^{\mathrm{t}} Ax.$$

Dies zeigt $U \subseteq \left\{c \in \mathbb{F}_2^{25\times 1} : \left(\begin{smallmatrix} v^{\mathrm{t}} \\ w^{\mathrm{t}} \end{smallmatrix}\right) c = 0\right\} =: W$. Nach Satz 6.6 gilt

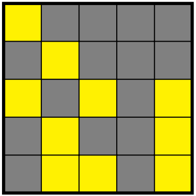
$$\dim W = 25 - \mathrm{rk}\left(\begin{smallmatrix} v^{\mathrm{t}} \\ w^{\mathrm{t}} \end{smallmatrix}\right) = 23 = \dim U,$$

also $U = W$. □

Beispiel

Die Bedingung $v^{\mathrm{t}} b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).

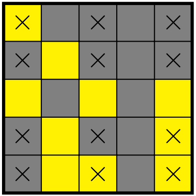
$b, v :$



Beispiel

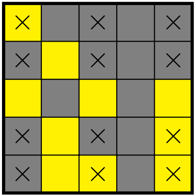
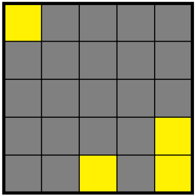
Die Bedingung $v^{\mathrm{t}}b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).

$b, v:$



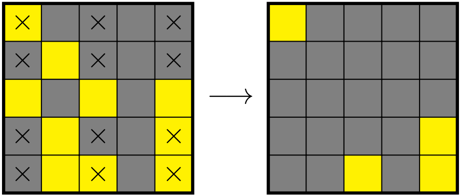
Beispiel

Die Bedingung $v^{\mathrm{t}}b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).

$b, v:$  $\longrightarrow$ 

Beispiel

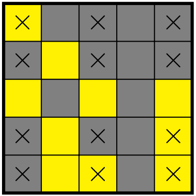
Die Bedingung $v^{\mathrm{t}} b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).

$b, v :$  $\longrightarrow 4$ ✓

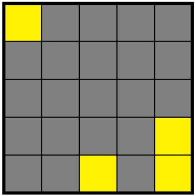
Beispiel

Die Bedingung $v^{\mathrm{t}}b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).

$b, v:$

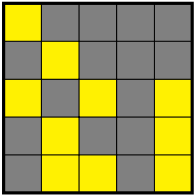


$\longrightarrow$



$\longrightarrow 4$ ✓

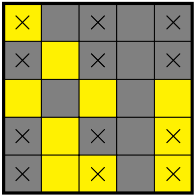
$b, w:$



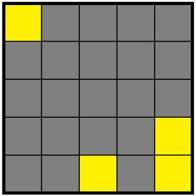
Beispiel

Die Bedingung $v^{\mathrm{t}}b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).

$b, v :$

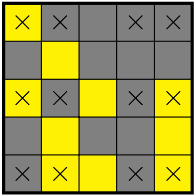


$\longrightarrow$



$\longrightarrow 4$ ✓

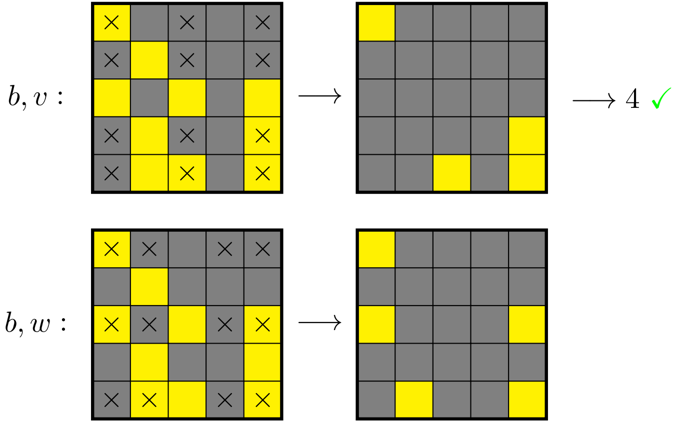
$b, w :$



$\longrightarrow$

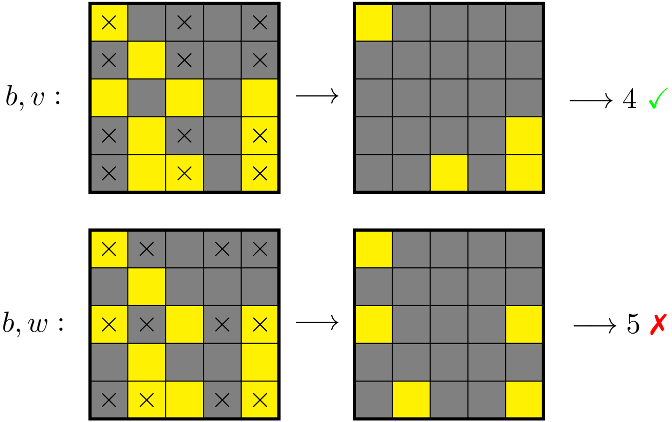
Beispiel

Die Bedingung $v^{\mathrm{t}}b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).



Beispiel

Die Bedingung $v^{\mathrm{t}}b = 0$ besagt, dass die Anzahl der gemeinsamen Einsen von b und v gerade ist (analog für w).



Ende

Übungsaufgabe

Welche Zustände mit nur einem brennenden Licht sind lösbar?

Ende

Übungsaufgabe

Welche Zustände mit nur einem brennenden Licht sind lösbar?

Frohe Weihnachten!