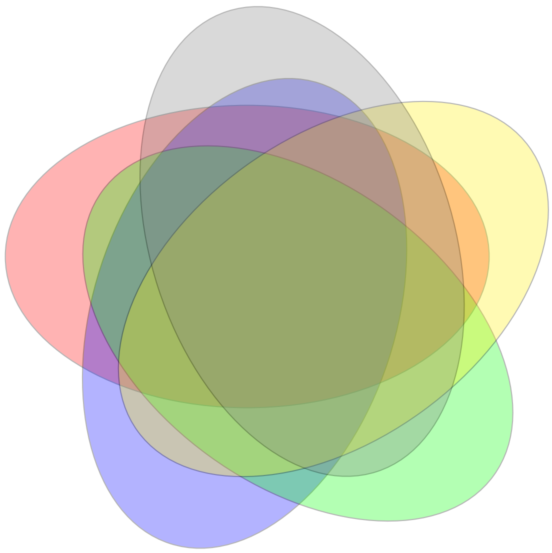
Mengenlehre

Seminar im Sommersemester 2019

Benjamin Sambale

Version: 13. Februar 2024



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegenden Notizen sind im Rahmen eines Seminars im Sommersemester 2019 an der Friedrich-Schiller-Universität Jena entstanden. Grundlage des Seminars war das Buch „The joy of sets“ von K. Devlin. Die folgenden Seiten haben allerdings recht wenig mit dem Buch gemeinsam, sondern dienen eher meiner eigenen Referenz.

1 Logik

Definition 1.1.

(i) Eine *Aussage* A ist ein Ausdruck, der entweder den Wahrheitswert *wahr* ($\mathbf{w}$) oder *falsch* ($\mathbf{f}$) annimmt. Man sagt dann A *gilt* bzw. A *gilt nicht*.

(ii) Für Aussagen A und B sind auch $\neg A$ (*nicht* A), $A \wedge B$ (A *und* B), $A \vee B$ (A *oder* B), $A \Rightarrow B$ (A *impliziert* B) und $A \Leftrightarrow B$ (A *genau dann wenn* B) Aussagen mit den offensichtlichen Wahrheitswerten.

(iii) Ein *Prädikat* ist eine Aussage $A = A(x)$, deren Wahrheitswert von einer Variablen x abhängt. Dann sind $\forall x : A(x)$ (*für alle* x gilt $A(x)$) und $\exists x : A(x)$ (*es existiert* ein x, sodass $A(x)$ gilt) Aussagen.

Bemerkung 1.2.

(i) Im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch ist das mathematische *oder* nicht zum *entweder oder* gleichbedeutend. Das heißt, die Aussage $\mathbf{w} \vee \mathbf{w}$ ist wahr.

(ii) Man kann den Wahrheitswert einer Aussage durch Wahrheitstabellen bestimmen. Zum Beispiel gilt

A	B	$A \Rightarrow B$
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**w**
f	**f**	**w**

Lemma 1.3. *Für Aussagen A, B und C gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $(A \wedge \mathbf{w}) \Leftrightarrow A$ *und* $(A \vee \mathbf{f}) \Leftrightarrow A$ (*Neutralität*).

(ii) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ *und* $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ (*Idempotenz*).

(iii) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ *und* $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ (*Kommutativität*).

(iv) $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$, $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$ *und* $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ (*Assoziativität*). *Die Aussagen $A \wedge B \wedge C$ usw. sind also wohldefiniert.*

(v) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ *und* $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (*Distributivität*).

(vi) $(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$ (*doppelte Negation*).

(vii) $A \vee \neg A$ (*Satz vom ausgeschlossenen Dritten*) *und* $\neg(A \wedge \neg A)$ (*Satz vom Widerspruch*).

(viii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ *und* $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (De Morgan*sche Regeln*).

(ix) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (*Kontraposition*).

(x) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (*Transitivität*).

(xi) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (*Modus ponens*)

(xii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$.

Beweis. Alle Aussagen lassen sich durch Wahrheitstabellen verifizieren. Alternativ kann man Aussagen auch aus anderen Aussagen herleiten. So folgt der Satz vom Widerspruch aus dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten durch Anwendung der ersten De Morganschen Regel und der doppelten Negation. □

Bemerkung 1.4.

(i) Die De Morganschen Regeln lassen sich allgemeiner in der Form $(\neg\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : (\neg A(x))$ und $(\neg\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : (\neg A(x)))$ für Prädikate formulieren.

(ii) Lemma 1.3 zeigt, dass man mit den Symbolen $\neg$ und $\wedge$ alle weiteren Terme bilden kann.

2 Mengen

Definition 2.1 (Cantor)**.** Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Man sagt dann: x ist ein *Element* von M und schreibt $x \in M$ sowie $M = \{x : x \in M\}$ (bzw. $x \notin M$ für $\neg(x \in M)$). Man nennt M *leer*, *endlich* bzw. *unendlich*, falls M keine Elemente, endlich viele bzw. unendlich viele Elemente enthält.

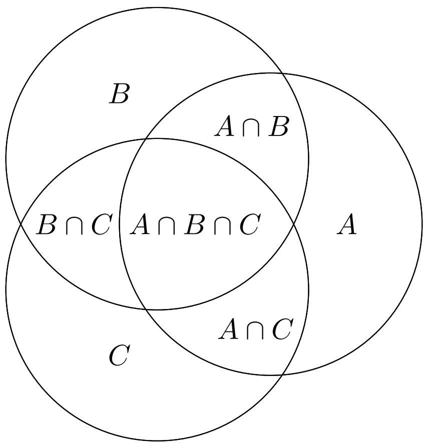
Bemerkung 2.2 (Russellsche Antinomie)**.** Definition 2.1 ist ungenau, denn sie lässt Mengen zu, die zu logischen Widersprüchen führen. Sei beispielsweise M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Die Aussage $M \in M$ kann dann weder wahr noch falsch sein. Um solche Widersprüche zu verhindern, führt man ein Axiomensystem ein (Definition 2.5).

Definition 2.3. Für Mengen A und B sei

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x : x \in A \vee x \in B\} && (\textit{Vereinigung}),\\ A \cap B &:= \{x : x \in A \wedge x \in B\} && (\textit{Durchschnitt}),\\ A \setminus B &:= \{x : x \in A \wedge x \notin B\} && (\textit{Differenz}) \end{aligned}$$

(die Schreibweise := besagt, dass die linke Seite durch die rechte definiert wird). Im Fall $A \cup B = B$ ist A eine *Teilmenge* von B. Man schreibt dann $A \subseteq B$ oder $A \subsetneq B$, falls zusätzlich $A \neq B$ (man spricht dann von einer *echten* Teilmenge). Ist A keine Teilmenge von B, so schreibt man $A \nsubseteq B$.

Bemerkung 2.4. Vereinigungen und Durchschnitte von Mengen lassen sich graphisch durch Venn-*Diagramme* darstellen:



Sind mehr als drei Mengen im Spiel, so lässt sich die allgemeine Situation nicht mehr durch Kreise darstellen. Das Coverbild zeigt ein Venn-Diagramme für fünf Mengen mit Hilfe von Ellipsen.

Definition 2.5 (Zermelo-Fraenkel)**.** Jedes mathematische Objekt wird formal aus Mengen konstruiert. Dabei sind ausschließlich folgende *Axiome* zugelassen (dies sind Aussagen, deren Wahrheitswert auf **w** festgelegt ist):

(1) (Unendlichkeitsaxiom) Es existiert eine unendliche Menge M mit $x \in M \Rightarrow x \cup \{x\} \in M$.

(2) (Extensionalitätsaxiom) Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

(3) (Fundierungsaxiom) Jede nichtleere Menge M besitzt ein Element $x \in M$, sodass $M \cap x$ leer ist.

(4) (Ersetzungsaxiom) Sei $A(x, y)$ ein Prädikat mit der Eigenschaft $(A(x, y) \wedge A(x, z)) \Rightarrow y = z$. Für jede Menge B existiert dann eine Menge C mit $x \in C \Leftrightarrow (\exists y \in B : A(x, y))$.

(5) (Vereinigungsaxiom) Für jede Menge A existiert eine Menge B mit der Eigenschaft $x \in B \Leftrightarrow (\exists C \in A : x \in C)$. Man schreibt $B = \bigcup_{a \in A} a$.

(6) (Potenzmengenaxiom) Für jede Menge M ist auch $\mathcal{P}(M) := \{N : N \subseteq M\}$ eine Menge, die man *Potenzmenge* von M nennt.

(7) (Auswahlaxiom) Ist A eine Menge von nichtleeren Mengen, so existiert eine Menge B, die zu jeden $C \in A$ genau ein $x \in C$ enthält.

Bemerkung 2.6.

(i) In der Literatur finden sich weitere (historisch motivierte) Axiome, die man jedoch aus den oben genannten ableiten kann. Beispielsweise impliziert das Ersetzungsaxiom das

Aussonderungsaxiom: Ist $A(x)$ ein Prädikat und B eine Menge, so existiert eine Menge C mit $x \in C \Leftrightarrow (x \in B \wedge A(x))$

(wähle $A(x, y) := (x = y \wedge A(x))$). Man schreibt $C = \{x \in B : A(x)\}$. Aus dem Unendlichkeitsaxiom und dem Aussonderungsaxiom erhält man das

Leermengenaxiom: Es existiert eine leere Menge $\varnothing$.

(wähle $A(x) := \mathbf{f}$). Nach dem Extensionalitätsaxiom ist $\varnothing$ die einzige leere Menge. Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \varnothing$. Schließlich ergibt sich das

Paarmengenaxiom: Für Mengen A und B existiert eine Menge C, die nur A und B als Elemente hat.

Dafür wendet man das Ersetzungsaxiom auf

$$M := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

mit dem Prädikat

$$A(x, y) := (x = \varnothing \wedge y = A) \vee (x = \{\varnothing\} \wedge y = B)$$

an. Man schreibt $C = \{A, B\}$. Mit dem Vereinigungsaxiom folgt schließlich, dass $A \cup B$ tatsächlich eine Menge ist. Das Aussonderungsaxiom garantiert, dass auch $A \cap B$ und $A \setminus B$ Mengen sind.

(ii) Das Fundierungsaxiom verhindert die Russellsche Antinomie. Nach Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz ist es jedoch unmöglich zu beweisen, dass die Zermelo-Fraenkel-Axiome keine anderen Widersprüche liefern. Ist dies tatsächlich der Fall (wovon die meisten Mathematiker ausgehen), so besagt Gödels erster Unvollständigkeitssatz, dass es Aussagen gibt, deren Wahrheitswert sich nicht bestimmen lässt. Das bekannteste Beispiel hierfür ist die *Kontinuumshypothese* (siehe Bemerkung 8.7).

(iii) Manche Mathematiker verzichten auf das Auswahlaxiom, da es die Konstruktion kontraintuitiver Mengen zulässt: Das *Banach-Tarski-Paradoxon* besagt beispielsweise, dass man eine dreidimensionale Kugel in endlich viele Teile zerlegen kann, die anders zusammengesetzt zwei Kugeln vom gleichen Volumen wie die Ausgangskugel ergeben.

(iv) In seltenen Fällen benötigt man Objekte, die zu „groß“ sind um Mengen zu sein. Diese heißen *Klassen*. Zum Beispiel ist die Gesamtheit aller Mengen eine Klasse (Bemerkung 8.7).

Lemma 2.7. *Für Mengen A, B und C gilt:*

(i) $A \cup A = A = A \cap A$ *(Idempotenz).*

(ii) $A \cup B = B \cup A$ *und* $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativität).*

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *und* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Assoziativität).*

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Distributivität).*

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ *und* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ *(De Morgansche Regeln).*

(vi) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Beweis. Durch logische Deduktion mittels Lemma 1.3 oder mit Venn-Diagrammen. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$ □

3 Relationen

Definition 3.1.

(i) Seien A und B Mengen mit $a \in A$ und $b \in B$. Dann heißt $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ *(geordnetes) Paar* von a und b. Im Gegensatz zur Menge $\{a, b\}$ gilt $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')$.

(ii) Die Menge

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

heißt *kartesisches Produkt* von A und B.

(iii) Induktiv definiert man *Tripel* $(a, b, c) := (a, (b, c))$ und allgemeiner *n-Tupel* $(a_1, \ldots, a_n) := (a_1, (a_2, \ldots, a_n))$ für $n \geq 2$. Analog ist $A_1 \times \ldots \times A_n := A_1 \times (A_2 \times \ldots \times A_n)$ für Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Speziell setzt man $A^n := A \times \ldots \times A$ (n Faktoren).

(iv) Eine *Relation* auf A ist eine Teilmenge $\sim \subseteq A \times A$. Man schreibt dann $a \sim b$, falls $(a, b) \in \sim$. Man nennt $\sim$

- *reflexiv*, falls $\forall a \in A : a \sim a$.
- *symmetrisch*, falls $\forall a, b \in A : (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$.
- *antisymmetrisch*, falls $\forall a, b \in A : (a \sim b \sim a \Rightarrow a = b)$.
- *transitiv*, falls $\forall a, b, c \in A : (a \sim b \sim c \Rightarrow a \sim c)$.
- *total*, falls $\forall a, b \in A : (a \sim b \vee b \sim a)$.
- *Äquivalenzrelation*, falls $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- *Ordnungsrelation*, falls $\sim$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

(v) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge A und $a \in A$, so nennt man $[a] := \{b \in A : a \sim b\} \subseteq A$ die *Äquivalenzklasse* von a.

Beispiel 3.2. Auf jeder Menge M ist die Gleichheitsrelation eine Äquivalenzrelation und die Teilmengenrelation $\subseteq$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

Lemma 3.3. *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, so existiert ein $\mathcal{R} \subseteq A$, sodass A die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen $[r]$ mit $r \in \mathcal{R}$ ist.*

Beweis. Seien $a, b \in A$ und $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt $a \sim c$ und $b \sim c$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt $c \sim b$. Da $\sim$ transitiv ist, gilt $a \sim b$. Für jedes $d \in [b]$ gilt also $a \sim b \sim d$ und $a \sim d$. Dies zeigt $[b] \subseteq [a]$ und analog erhält man $[a] \subseteq [b]$. Es folgt $[a] = [b]$. Somit sind je zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt. Die Existenz von $\mathcal{R}$ folgt nun aus dem Auswahlaxiom. □

Bemerkung 3.4. In der Situation von Lemma 3.3 nennt man $\mathcal{R}$ ein *Repräsentantensystem* für die Äquivalenzklassen.

4 Funktionen

Definition 4.1.

(i) Seien A und B Mengen. Eine *Funktion* oder *Abbildung* von A nach B ist eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$, sodass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ existiert. Man schreibt dann $f(a) = b$ und

$$f \colon A \to B, \qquad a \mapsto f(a)$$

anstatt $(a, b) \in f$. Die Menge aller Funktionen $A \to B$ wird mit B^A bezeichnet. Außerdem heißt A *Definitionsbereich* und B *Wertebereich* von f.

(ii) Man nennt $f(a)$ das *Bild* von $a \in A$ unter f und $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ ist das *Bild* von f. Für $C \subseteq B$ ist $f^{-1}(C) := \{a \in A : f(a) \in C\} \subseteq A$ das *Urbild* von C unter f.

(iii) Man nennt f

- *injektiv*, falls $\forall a, a' \in A : (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$.
- *surjektiv*, falls $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$, d. h. $f(A) = B$.
- *bijektiv* (oder *Bijektion*), falls f injektiv und surjektiv ist. Man nennt dann A und B *gleichmächtig*.
- *Permutation*, falls f bijektiv ist und $A = B$. Die Menge aller Permutationen auf A wird mit $\mathrm{Sym}(A)$ bezeichnet.

(iv) Sind $f \colon A \to B$ und $g \colon B \to C$ Funktionen, so auch $g \circ f \colon A \to C$ mit $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ für $a \in A$. Man nennt $g \circ f$ die *Komposition* (oder *Hintereinanderausführung*, *Verkettung*) von f und g.

(v) Ist $f \colon A \to B$ eine Funktion und $C \subseteq A$, so ist auch die *Einschränkung* $f_{|C} : C \to B$, $c \mapsto f(c)$ eine Funktion.

Beispiel 4.2.

(i) Für jede Menge A und $B \subseteq A$ ist $f \colon B \to A$, $b \mapsto b$ eine injektive Funktion, die man *Inklusion(sabbildung)* oder *Einbettung* nennt. Im Fall $B = A$ ist f sogar bijektiv und man nennt $\mathrm{id}_A := f$ *Identität* auf A.

(ii) Für Mengen A und B ist $f\colon A \times B \to B \times A$, $(a,b) \mapsto (b,a)$ sicher eine Bijektion.

(iii) Für eine beliebige Indexmenge I und Mengen A_i $(i \in I)$ kann man das kartesische Produkt $\bigtimes_{i\in I} A_i$ als Menge aller Funktionen $I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $f(i) \in A_i$ für $i \in I$ definieren. Für endliches I ist dies zu unserer ursprünglichen Definition äquivalent. Man schreibt die Elemente in $\bigtimes_{i\in I} A_i$ daher auch in der Form $(a_i)_{i\in I}$.

(iv) Zwei endliche Mengen A und B sind offenbar genau dann gleichmächtig, wenn $|A| = |B|$ (siehe auch Satz 7.6).

Lemma 4.3. *Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ Funktionen mit $A \neq \varnothing$. Dann gilt*

(i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) =: h \circ g \circ f$ (Assoziativität).

(ii) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.

(iii) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.

(iv) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(vi) Genau dann ist f injektiv, falls eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ existiert.

(vii) Genau dann ist f surjektiv, falls eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert.

(viii) Genau dann ist f bijektiv, falls eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert. Ggf. ist g eindeutig bestimmt und man nennt $f^{-1} := g$ die Umkehrfunktion *von f.*

Beweis.

(i) Für $a \in A$ ist $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a)$.

(ii) Für $a, a' \in A$ mit $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ gilt $g(f(a)) = g(f(a'))$, also $f(a) = f(a')$ und $a = a'$.

(iii) Es gilt $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$.

(iv) Sei $f(a) = f(a')$ für $a, a' \in A$. Dann ist $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $a = a'$. Also ist f injektiv.

(v) Es gilt $C = (g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq C$, also $g(B) = C$.

(vi) Ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist f injektiv nach (iv). Sei umgekehrt f injektiv und $c \in A$ fest gewählt (beachte: $A \neq \varnothing$). Wir definieren $g\colon B \to A$ wie folgt: ist $b = f(a)$ für ein $a \in A$, so sei $g(b) := a$ und anderenfalls $g(b) := c$. Da f injektiv ist, ist g dadurch wohldefiniert. Außerdem gilt $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$ für $a \in A$, also $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

(vii) Ist $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist f surjektiv nach (v). Sei umgekehrt f surjektiv, d. h. $f(A) = B$. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $g(b) \in f^{-1}(b)$ für alle $b \in B$. Offenbar gilt $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = b$, d. h. $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

(viii) Ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so ist f injektiv und surjektiv nach (iv) und (v), also auch bijektiv. Sei umgekehrt f bijektiv. Nach (vi) und (vii) existieren $g\colon B \to A$ und $h\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ h = \mathrm{id}_B$. Dann gilt $g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h$. Dies zeigt auch, dass g eindeutig bestimmt ist. $\square$

Satz 4.4 (Cantor-Bernstein)**.** *Seien A und B Mengen mit injektiven Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$. Dann sind A und B gleichmächtig.*

Beweis. Wir definieren $C_0 := A \setminus g(B)$ und $C_n := g(f(C_{n-1}))$ für $n \geq 1$. Weiter sei $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ und $h\colon A \to B$ mit

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in C, \\ g^{-1}(x) & \text{falls } x \notin C. \end{cases}$$

Im Fall $x \notin C$ ist $x \notin C_0$, d. h. $x \in g(B)$. Folglich ist $g^{-1}(x)$ durch die Injektivität von g eindeutig bestimmt und h ist wohldefiniert. Seien nun $x, y \in A$ mit $h(x) = h(y)$. Nehmen wir $x \in C$ und $y \notin C$ an. Dann ist $f(x) = g^{-1}(y)$ und $g(f(x)) = y$. Sei $x \in C_n$ für ein $n \geq 0$. Dann folgt der Widerspruch $y = g(f(x)) \in g(f(C_n)) = C_{n+1} \subseteq C$. Also gilt $x, y \in C$ oder $x, y \notin C$ und man erhält $x = y$. Somit ist h injektiv.

Sei nun $y \in B$ beliebig. Im Fall $g(y) \notin C$ ist $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$. Sei also $g(y) \in C_n$ für ein $n \geq 1$. Es existiert dann ein $x \in C_{n-1}$ mit $g(f(x)) = g(y)$. Aus der Injektivität von g folgt $h(x) = f(x) = y$. Also ist h auch surjektiv und bijektiv. $\square$

5 Geordnete Mengen

Definition 5.1. Sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf einer Menge A und $B \subseteq A$.

(i) Wie üblich benutzen wir die Schreibweisen $a \geq a'$ (falls $a' \leq a$), $a < a'$ (falls $a \leq a' \neq a$) und $a > a'$ (falls $a' \leq a \neq a'$) für $a, a' \in A$.

(ii) Ein $b \in B$ heißt

- *größtes Element* von B, falls $\forall b' \in B : b' \leq b$.
- *maximales Element* von B, falls $\forall b' \in B : (b \leq b' \Rightarrow b = b')$.

(iii) Ein $a \in A$ heißt *obere Schranke* von B, falls $\forall b \in B : b \leq a$. Analog definiert man *kleinstes Element*, *minimales Element* und *untere Schranke*.

(iv) Man nennt A *wohlgeordnet*, falls jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element enthält.

(v) Für $a \in A$ sei $A^{<a} := \{a' \in A : a' < a\}$.

Bemerkung 5.2.

(i) Im Allgemeinen existieren weder größte Elemente, noch maximale Elemente, noch obere Schranken. Größte Elemente sind maximal und eindeutig, wenn sie existieren. In total geordneten Mengen ist jedes maximale Element auch das größte Element. Besitzt M ein größtes Element, so bezeichnet man es mit $\max M$ (analog $\min M$ für das kleinste Element).

(ii) Wohlgeordnete Mengen sind stets total geordnet. Umgekehrt ist eine total geordnete Menge bereits dann wohlgeordnet, wenn es keine unendliche Folge der Form $a_0 > a_1 > \ldots$ gibt. Insbesondere ist jede endliche total geordnete Menge wohlgeordnet.

(iii) Jede Teilmenge einer total (wohl)geordneten Menge ist total (wohl)geordnet.

Satz 5.3 (Transfinite Induktion)**.** *Sei $(A, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge. Sei $P(a)$ ein Prädikat, sodass für alle $a \in A$ gilt:*

$$(\forall b \in A^{<a} : P(b)) \Longrightarrow P(a).$$

Dann gilt $P(a)$ für alle $a \in A$.

Beweis. Wäre die Menge $\{a \in A : \neg P(a)\}$ nichtleer, so gäbe es ein kleinstes $a \in A$ mit $\neg P(a)$. Für jedes $b < a$ wäre aber $P(b)$ wahr. $\square$

Lemma 5.4 (Zorn). *Sei M eine geordnete Menge. Besitzt jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke, so enthält M ein maximales Element.*

Beweis. [1] Wir nehmen das Gegenteil an. Da $\varnothing \subseteq M$ eine obere Schranke besitzt, ist $M \neq \varnothing$. Sei A eine total geordnete Teilmenge von M und $x \in M$ eine obere Schranke von A. Dann ist x nicht maximal. Daher existiert ein $y \in M$ mit $x < y$. Insbesondere ist $a < y$ für alle $a \in A$. Wir nennen y eine *echte* obere Schranke von A. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Funktion f, die jeder total geordneten Teilmenge $A \subseteq M$ eine echte obere Schranke $f(A)$ zuordnet. Für $a \in A$ ist auch $A^{<a}$ total geordnet. Wir nennen A *zulässig*, falls A wohlgeordnet und $f(A^{<a}) = a$ für jedes $a \in A$ ist. Offenbar ist $\varnothing$ zulässig. Für jede zulässige Teilmenge $A \subseteq M$ ist auch $A \cup \{f(A)\}$ zulässig, denn

$$(A \cup \{f(A)\})^{<a} = \begin{cases} A^{<a} & \text{falls } a \in A, \\ A & \text{falls } a = f(A). \end{cases}$$

Seien $A, B \subseteq M$ zulässig mit $A \neq B$, o. B. d. A. $B \nsubseteq A$. Da B wohlgeordnet ist, existiert ein kleinstes Element b in $B \setminus A$. Dann ist $B^{<b} \subseteq A$.

Annahme: $B^{<b} \neq A$.
Da A wohlgeordnet ist, existiert ein kleinstes Element a von $A \setminus B^{<b}$. Dann ist $A^{<a} \subseteq B^{<b}$. Wegen $B \nsubseteq A^{<a}$ existiert ein kleinstes Element c von $B \setminus A^{<a}$. Daher ist $B^{<c} \subseteq A^{<a} \subseteq B^{<b} \subseteq A$. Im Fall $b < c$ wäre $b \in B^{<c} \subseteq A$ im Widerspruch zur Wahl von b. Also ist $c \leq b$. Im Fall $c = b$ ist $A^{<a} = B^{<c}$. Im Fall $c < b$ ist $c \in B^{<b} \subseteq A$. Wegen $c \notin A^{<a}$ ist $c \geq a$, d. h. $A^{<a} \subseteq A^{<c} \cap B \subseteq B^{<c} \subseteq A^{<a}$. Daher ist in jedem Fall $A^{<a} = B^{<c}$. Da A und B zulässig sind, folgt $a = f(A^{<a}) = f(B^{<c}) = c \leq b$. Im Fall $c = b$ wäre $b = c = a \in A$ im Widerspruch zur Wahl von b. Also ist $a = c < b$ und wir haben den Widerspruch $a = c \in B^{<b}$.

Also gilt $A = B^{<b} \subseteq B$. Insbesondere ist die Menge $\mathcal{M}$ aller zulässigen Teilmengen von M total geordnet bzgl. $\subseteq$. Wir zeigen, dass $Z := \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A \subseteq M$ total geordnet bzgl. $\leq$ ist. Dazu seien $a, b \in Z$. Dann existieren $A, B \in \mathcal{M}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Da $\mathcal{M}$ bzgl. $\subseteq$ total geordnet ist, gilt o. B. d. A. $A \subseteq B$ und $a, b \in B$. Da B total geordnet ist, gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$. Sei nun $a \in A \in \mathcal{M}$. Wegen $A \subseteq Z$ ist $A^{<a} \subseteq Z^{<a}$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $b \in Z^{<a}$, d. h. insbesondere $b < a$.

Annahme: $b \notin A$.
Sei $b \in B \in \mathcal{M}$. Dann ist $B \nsubseteq A$, d. h. $A = B^{<c}$ für ein $c \in B$ nach dem ersten Teil des Beweises. Dann hat man den Widerspruch $b \geq c > a$.

Also ist $A^{<a} = Z^{<a}$. Wir zeigen nun, dass Z wohlgeordnet ist. Sei dafür $\varnothing \neq X \subseteq Z$. Dann existiert ein $A \in \mathcal{M}$ mit $X \cap A \neq \varnothing$ und ein kleinstes Element x in $X \cap A$. Also enthält $Z^x = A^x$ keine Elemente aus X, d. h. x ist das kleinste Element in X. Schließlich zeigen wir $Z \in \mathcal{M}$. Dazu sei $a \in A \in \mathcal{M}$. Dann ist $Z^{<a} = A^{<a}$ und $a = f(A^{<a}) = f(Z^{<a})$. Also ist Z zulässig. Dann ist aber auch $Z \cup \{f(Z)\}$ zulässig im Widerspruch zu $f(Z) \notin Z$. $\square$

Bemerkung 5.5. Lemma 5.4 gilt auch in der dualen Version für untere Schranken und minimale Elemente, indem man $\leq$ durch $\geq$ ersetzt.

Satz 5.6 (Wohlordnungssatz). *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

[1] Ein etwas kürzerer Beweis steht in meinem Algebra-Skript.

Beweis. Sei M eine Menge und $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare $(N, \leq_N)$, wobei $N \subseteq M$ durch $\leq_N$ wohlgeordnet ist. Da die leere Menge wohlgeordnet ist, ist $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Durch

$$(N_1, \leq_1) \leq (N_2, \leq_2) :\iff N_1 \subseteq N_2,\ \leq_1 \subseteq \leq_2,\ \forall x \in N_1, y \in N_2 \setminus N_1 : x < y$$

ist $\mathcal{M}$ geordnet. Sei $\varnothing \neq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet und $S := \bigcup_{(N, \leq_N) \in \mathcal{N}} N \subseteq M$. Für $x, y \in S$ existieren $(N_1, \leq_1), (N_2, \leq_2) \in \mathcal{N}$ mit $x \in N_1$ und $y \in N_2$. Da $\mathcal{N}$ total geordnet ist, gilt o. B. d. A. $N_1 \subseteq N_2$. Wir definieren

$$x \leq_S y :\iff x \leq_2 y.$$

Ist auch $(N_3, \leq_3) \in \mathcal{N}$ mit $x, y \in N_3$, so gilt $(N_2, \leq_2) \leq (N_3, \leq_3)$ oder $(N_3, \leq_3) \leq (N_2, \leq_2)$, da $\mathcal{N}$ total geordnet ist. Wegen $\leq_2 \subseteq \leq_3$ oder $\leq_3 \subseteq \leq_2$ gilt dann $x \leq_2 y \Leftrightarrow x \leq_3 y$. Daher hängt $\leq_S$ nicht von der Wahl von N_2 ab. Man zeigt leicht, dass $(S, \leq_S)$ eine geordnete Menge ist. Sei $\varnothing \neq T \subseteq S$ und $(N, \leq_N) \in \mathcal{N}$ mit $T \cap N \neq \varnothing$. Sei x das kleinste Element von $T \cap N$ bzgl. $\leq_N$. Sei $y \in T$ beliebig. Dann existiert $(N_1, \leq_1) \in \mathcal{N}$ mit $y \in N_1$. Im Fall $y \in N$ ist $x \leq_N y$ und $x \leq_S y$. Anderenfalls ist $(N, \leq) < (N_1, \leq_1)$ und $x <_S y$ nach Definition von $\leq$ auf $\mathcal{M}$. Daher ist x das kleinste Element von T und S ist wohlgeordnet. Insgesamt ist $(S, \leq_S) \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Nach Zorns Lemma existiert ein maximales Element $(A, \leq_A) \in \mathcal{M}$. Im Fall $A \neq M$ existiert $b \in M \setminus A$. Dann ist $A \cup \{b\}$ wohlgeordnet, indem man $a < b$ für alle $a \in A$ definiert. Dies widerspricht der Maximalität von $(A, \leq_A)$. Also ist $M = A$ wohlgeordnet. □

Bemerkung 5.7. Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen, so lässt sich $\bigcup_{i \in I} A_i$ wohlordnen. Man kann dann für jedes A_i das kleinste Element von A_i auswählen. Auf diese Weise folgt das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz. Daher sind das Auswahlaxiom, Zorns Lemma und der Wohlordnungssatz zueinander äquivalent.

6 Ordinalzahlen

Definition 6.1. Eine Bijektion $f\colon A \to B$ zwischen geordneten Mengen $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ heißt *Isomorphismus*, falls $a \leq_A a' \iff f(a) \leq_B f(a')$ für alle $a, a' \in A$ gilt. Man nennt A und B dann *isomorph* und schreibt $A \cong B$.

Bemerkung 6.2. Isomorphe geordnete Mengen haben sicher die gleichen Eigenschaften (total, wohlgeordnet, …). Jede geordnete Menge ist durch die Identität zu sich selbst isomorph. Außerdem sind Kompositionen und Umkehrabbildungen von Isomorphismen wieder Isomorphismen. Die Isomorphie von geordneten Mengen ist daher eine Äquivalenzrelation. Wir bestimmen im Folgenden ein kanonisches Repräsentantensystem für die entsprechenden Äquivalenzklassen.

Lemma 6.3. *Zwischen wohlgeordneten Mengen A und B existiert höchstens ein Isomorphismus $A \to B$.*

Beweis. Seien $f, g\colon A \to B$ Isomorphismen und $h := g^{-1} \circ f$. Ist $\{a \in A : h(a) < a\}$ nichtleer, so existiert ein kleinstes Element $a \in A$ mit $h(a) < a$. Da h ein Isomorphismus ist, gilt auch $h(h(a)) < h(a) < a$ im Widerspruch zur Wahl von a. Daher ist $h(a) \geq a$ für alle $a \in A$. Wiederholt man das Argument mit $h^{-1} = f^{-1} \circ g$, so erhält man $h^{-1}(a) \geq a$ also $a \geq h(a) \geq a$ für alle $a \in A$. Dies zeigt $f = g$. □

Definition 6.4. Eine wohlgeordnete Menge α heißt *Ordinalzahl*, falls $\alpha^{<x} = x$ für alle $x \in \alpha$ gilt.

Bemerkung 6.5. Sei α eine Ordinalzahl mit Ordnungsrelation $\leq$ und $x, y \in \alpha$. Dann gilt

$$x \leq y \iff \alpha^{<x} \subseteq \alpha^{<y} \iff x \subseteq y,$$

d. h. $\leq\ =\ \subseteq$. Eine Ordinalzahl ist also bereits durch die Angabe einer Menge eindeutig bestimmt. Außerdem gilt

$$x < y \iff x \in \alpha^{<y} \iff x \in y.$$

Lemma 6.6. *Für Ordinalzahlen α und β gilt:*

(i) Jedes $x \in \alpha$ ist eine Ordinalzahl.

(ii) $\beta \in \alpha \Longleftrightarrow \beta \subsetneq \alpha$.

(iii) $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$.

(iv) $\alpha \cong \beta \Longrightarrow \alpha = \beta$.

Beweis.

(i) Wegen $x = \alpha^{<x} \subseteq \alpha$ ist x wohlgeordnet. Für $y \in x$ gilt $x^{<y} = (\alpha^{<x})^{<y} = \alpha^{<y} = y$.

(ii) Für $\beta \in \alpha$ gilt $\beta = \alpha^{<\beta} \subseteq \alpha \setminus \{\beta\} \subsetneq \alpha$. Sei nun umgekehrt $\beta \subsetneq \alpha$. Sei x das kleinste Element von $\alpha \setminus \beta$. Dann gilt $x = \alpha^{<x} \subseteq \beta$. Für $y \in \beta$ gilt umgekehrt $\beta^{<y} = y = \alpha^{<y}$. Im Fall $y > x$ wäre $x \in \alpha^{<y} \subseteq \beta$. Also ist $y \leq x$ und $y < x$ wegen $x \notin \beta$. Dies zeigt $\beta \subseteq \alpha^{<x} = x$. Also ist $\beta = x \in \alpha$.

(iii) O. B. d. A. sei $\alpha \not\subseteq \beta$. Sei x das kleinste Element von $\alpha \setminus \beta$. Dann ist $x = \alpha^{<x} \subseteq \beta$. Im Fall $x \subsetneq \beta$ folgt der Widerspruch $x \in \beta$ aus (i) und (ii). Also ist $\beta = \alpha^{<x} \subseteq \alpha$.

(iv) Sei $f\colon \alpha \to \beta$ ein Isomorphismus und $A := \{x \in \alpha : f(x) \neq x\}$. Angenommen A besitzt ein kleinstes Element x. Dann ergibt sich der Widerspruch

$$f(x) = f(\alpha^{<x}) = \{f(x') : x' < x\} = \{x' : x' < x\} = \alpha^{<x} = x.$$

Also ist $M = \varnothing$. □

Lemma 6.7. *Sei A eine wohlgeordnete Menge, sodass $A^{<x}$ für alle $x \in A$ zu einer Ordinalzahl isomorph ist. Dann ist A selbst zu einer Ordinalzahl isomorph.*

Beweis. Für $x \in A$ sei α_x die nach Lemma 6.6 eindeutig bestimmte Ordinalzahl mit $A^{<x} \cong \alpha_x$. Nach Lemma 6.3 existiert genau ein Isomorphismus $f_x : A^{<x} \to \alpha_x$. Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} f\colon A &\to \{\alpha_x : x \in A\} =: M, \\ x &\mapsto \alpha_x \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist, wobei M durch $\subseteq$ geordnet ist. Für $y < x$ gilt $A^{<y} \subseteq A^{<x}$. Einschränken von f_x liefert einen Isomorphismus

$$A^{<y} \to f_x(A^{<y}) = \alpha_x^{<f_x(y)} = f_x(y) \in \alpha_x.$$

Nach Lemma 6.6 ist $f_x(y)$ eine Ordinalzahl und es folgt $f_x(y) = \alpha_y$. Dies zeigt $\alpha_y \subsetneq \alpha_x$. Also ist f ein Isomorphismus. Mit A ist auch M wohlgeordnet. Für $\alpha_x \in M$ gilt

$$M^{\alpha_x} = \{\alpha_y : \alpha_y \subsetneq \alpha_x\} = \{f_x(y) : y \in A^{<x}\} = f_x(A^{<x}) = \alpha_x.$$

Also ist M eine Ordinalzahl. □

Satz 6.8. *Jede wohlgeordnete Menge ist zu genau einer Ordinalzahl isomorph.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 6.6. Nach Lemma 6.7 genügt es zu zeigen, dass alle $A^{<x}$ $(x \in A)$ zu Ordinalzahlen isomorph sind. Sei $x \in A$ minimal, sodass $A^{<x}$ zu keiner Ordinalzahl isomorph ist. Für alle $y \in A^{<y}$ ist $(A^{<x})^{<y} = A^{<y}$ zu einer Ordinalzahl isomorph. Nach Lemma 6.7 wäre dann aber $A^{<x}$ selbst zu einer Ordinalzahl isomorph. $\square$

Bemerkung 6.9. Man kann Ordinalzahlen daher als Repräsentanten für die Isomorphieklassen von wohlgeordneten Mengen ansehen.

Lemma 6.10. *Für jede Ordinalzahl α ist auch der* Nachfolger $\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ *eine Ordinalzahl.*

Beweis. Wie üblich ist α^+ durch $\subseteq$ geordnet. Sei $\varnothing \neq A \subseteq \alpha'$. Im Fall $A = \{\alpha\}$ ist α das kleinste Element von A. Anderenfalls ist das kleinste Element von $A \cap \alpha$ auch das kleinste Element von A. Also ist α' wohlgeordnet. Für $x \in \alpha$ ist $(\alpha^+)^{<x} = \alpha^{<x} = x$. Für $x = \alpha$ ist $(\alpha^+)^{<x} = \alpha = x$. Somit ist α^+ eine Ordinalzahl. $\square$

Beispiel 6.11. Die einzigen endlichen Ordinalzahlen sind die *natürlichen Zahlen*

$$0 := \varnothing, \qquad 1 := 0^+ = \{\varnothing\}, \qquad 2 := 1^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \qquad \ldots.$$

Diese Zahlen stimmen mit ihrer (gewohnten) Mächtigkeit überein. Die kleinste unendliche Ordinalzahl ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ (Unendlichkeitsaxiom). Die transfinite Induktion wird für $\mathbb{N}$ zur *vollständigen Induktion.* Wir setzen $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

7 Kardinalzahlen

Satz 7.1. *Jede Menge von Ordinalzahlen ist wohlgeordnet bzgl. $\subseteq$.*

Beweis. Eine Menge $\mathcal{M}$ von Ordinalzahlen ist nach Lemma 6.6 total geordnet bzgl. $\subseteq$. Angenommen $\mathcal{M}$ enthält Elemente $\alpha_1 \supsetneq \alpha_2 \supsetneq \ldots$. Aus Lemma 6.6 folgt $\alpha_2, \alpha_2, \ldots \in \alpha_1$. Dann kann α_1 aber nicht wohlgeordnet (bzgl. $\subseteq$) sein. $\square$

Bemerkung 7.2 (Burali-Forti-Paradoxon)**.** Die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Ordinalzahlen ist keine Menge: Anderenfalls wäre $\mathcal{M}$ nach Satz 7.1 wohlgeordnet. Für $\alpha \in \mathcal{M}$ gilt dann

$$\mathcal{M}^{\alpha} = \{\beta \in \mathcal{M} : \beta \subsetneq \alpha\} \overset{6.6}{=} \{\beta \in \mathcal{M} : \beta \in \alpha\} = \alpha,$$

d. h. $\mathcal{M}$ ist selbst eine Ordinalzahl. Damit hat man den Widerspruch $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$, d. h. $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}$.

Definition 7.3. Jede Menge M kann nach dem Wohlordnungssatz wohlgeordnet werden. Nach Satz 6.8 ist M mit dieser Wohlordnung zu einer Ordinalzahl isomorph. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Ordinalzahlen, die bzgl. irgendeiner Ordnung zu M isomorph sind. Nach Satz 7.1 besitzt $\mathcal{M}$ ein kleinstes Element, welches man als *Kardinalzahl* $|M|$ von M bezeichnet.

Bemerkung 7.4.

(i) Als Ordinalzahlen lassen sich Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stets vergleichen, d. h. es gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Wir schreiben dann $\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{b} \le \mathfrak{a}$. Für beliebige Mengen A und B ist die Ungleichung $|A| \le |B|$ äquivalent zur Existenz einer injektiven Abbildung $A \to B$. Der Satz von Cantor-Bernstein ist daher nichts weiter als die Antisymmetrie von $\le$.

(ii) Für jede Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ gilt $|\mathfrak{a}| = \mathfrak{a}$.

(iii) Alle natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}$ selbst sind Kardinalzahlen.

(iv) Eine Menge M heißt *abzählbar* (bzw. *überabzählbar*), falls $|M| = \mathbb{N}$ (bzw. $|M| > \mathbb{N}$). Im ersten Fall lassen sich die Elemente von M mit $\mathbb{N}$ indizieren, d. h. $M = \{a_0, a_1, \ldots\}$.

Beispiel 7.5. Die Abbildung $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ mit $f(\mathbb{N}) := 0$ und $f(n) := n^+$ für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Bijektion. Dies zeigt $|\mathbb{N}^+| = \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\mathbb{N}^+$ eine Ordinalzahl, aber keine Kardinalzahl. Wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), \ldots\}$ ist auch $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \mathbb{N}$.

Satz 7.6. *Zwei Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie die gleiche Kardinalzahl besitzen.*

Beweis. Seien A und B Mengen. Gilt $|A| = |B|$, so sind A und B gleichmächtig. Sind umgekehrt A und B gleichmächtig, so sind auch $|A|$ und $|B|$ gleichmächtig. Sei $f\colon |A| \to |B|$ eine Bijektion. Für $x, y \in |A|$ gilt dann

$$x < y \iff x \subseteq y \iff f(x) \subseteq f(y) \iff f(x) < f(y).$$

Daher ist f ein Isomorphismus. Aus Lemma 6.6 folgt $|A| = |B|$. $\square$

8 Arithmetik von Kardinalzahlen

Definition 8.1. Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ definieren wir

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := |\mathfrak{a} \cup (1 \times \mathfrak{b})|, \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|,$$
$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} := |\{\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}\}|, \qquad \mathfrak{a}! := |\mathrm{Sym}(\mathfrak{a})|.$$

Man sagt: $\mathfrak{a}$ *plus* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ *mal* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ *hoch* $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ *Fakultät.*

Bemerkung 8.2.

(i) Die Konstruktion $1 \times \mathfrak{b}$ bewirkt, dass $\mathfrak{a}$ und $1 \times \mathfrak{b}$ stets disjunkt sind (beachte: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$). Die Notation $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ ist doppeldeutig, denn sie bezeichnet sowohl die Menge aller Abbildungen $\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ als auch deren Kardinalzahl.

(ii) Für eine beliebige Familie von Kardinalzahlen $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ definiert man allgemeiner

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \Big|\bigcup_{i \in I} \{i\} \times \mathfrak{a}_i\Big|, \qquad \prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \Big|\bigtimes_{i \in I} \mathfrak{a}_i\Big|.$$

Sind alle $\mathfrak{a}_i \ne 0$, so zeigt das Auswahlaxiom $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i \ne 0$. Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt $\sum_{a \in \mathfrak{a}} \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und $\prod_{a \in \mathfrak{a}} \mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ (Beispiel 4.2). Nach Beispiel 7.5 ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar.

(iii) Um Klammern zu sparen verabreden wir im Folgenden Punkt- vor Strichrechnung, d. h. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{c} := (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$.

Satz 8.3. *Für Mengen A und B gilt*

(i) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$,

(ii) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$,

(iii) $|A^B| = |A|^{|B|}$,

(iv) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$,

(v) $|\mathrm{Sym}(A)| = |A|!$.

Beweis. Für die Konstruktion geeigneter Bijektionen (Satz 7.6) kann man annehmen, dass A und B Kardinalzahlen sind. Dann sind (ii), (iii) und (v) erledigt. Für (i) benutzt man die Bijektion $f\colon (A \cup B) \cup (1 \times (A \cap B)) \to A \cup (1 \times B)$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in A \setminus B, \\ (0, x) & \text{falls } x \in B, \end{cases}$$
$$f(0, x) := x \qquad (x \in A \cap B).$$

Für (iv) benutzt man die Bijektion $f\colon \mathcal{P}(A) \to 2^A$, $B \mapsto f_B$ mit

$$f_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B, \\ 0 & \text{falls } x \notin B. \end{cases}$$ □

Satz 8.4. *Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gelten folgende Rechenregeln:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} + 0 = 0, & \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, & (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \\ \mathfrak{a} \cdot 1 = \mathfrak{a}, & \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}, & (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}), \\ \mathfrak{a}^0 = 1, & \mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, & 1^{\mathfrak{a}} = 1, \\ \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}, & (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}, & (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}, \\ \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}, & 0! = 1, & (\mathfrak{a} + 1)! = \mathfrak{a}! \cdot (\mathfrak{a} + 1). \end{array}$$

Beweis. Die meisten Behauptungen sind offensichtlich. Wir zeigen nur folgende:

- $\mathfrak{a}^0 = |\{\varnothing \to \mathfrak{a}\}| = \{\varnothing\} = 1$.
- Die Abbildung $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \to \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+c}$, $(f, g) \mapsto h$ mit

  $$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathfrak{b}, \\ g(x) & \text{falls } x \in \mathfrak{c} \end{cases}$$

  ist eine Bijektion.
- Die Abbildung $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} \to (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}$, $(f, g) \mapsto h$ mit

  $$g(x) := (f(x), g(x))$$

  für $x \in \mathfrak{c}$ ist eine Bijektion.

- Die Abbildung $(\mathfrak{a}^\mathfrak{b})^\mathfrak{c} \to \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}$, $f \mapsto g$ mit
$$g(x,y) := (f(y))(x)$$
ist eine Bijektion.
- $0! = |\mathrm{Sym}(\varnothing)| = |\{\varnothing \to \varnothing\}| = 0^0 = 1$.
- Sei $A := \mathfrak{a} \cup \{x\}$ mit $|A| = \mathfrak{a} + 1$. Dann ist die Abbildung $A \times \mathrm{Sym}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{Sym}(A)$, $(a,f) \mapsto g$ mit
$$g(y) := \begin{cases} a & \text{falls } y = x, \\ f(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases} \qquad (y \in A)$$
eine Bijektion. $\square$

Bemerkung 8.5. Für $\mathfrak{a} > 0$ gilt $0^\mathfrak{a} = |\{\mathfrak{a} \to \varnothing\}| = |\varnothing| = 0$.

Satz 8.6. *Für Kardinalzahlen $\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} \le \mathfrak{d}$ gilt:*

(i) $\mathfrak{a} < 2^\mathfrak{a}$,

(ii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} \le \mathfrak{b} + \mathfrak{d}$,

(iii) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \le \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}$,

(iv) $\mathfrak{a}^\mathfrak{c} \le \mathfrak{b}^\mathfrak{d}$ *falls* $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} > 0$.

Beweis.

(i) Die injektive Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})$, $x \mapsto \{x\}$ zeigt $\mathfrak{a} \le |\mathcal{P}(\mathfrak{a})| = 2^\mathfrak{a}$. Nehmen wir nun an, dass eine Bijektion $f\colon \mathfrak{a} \to \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ existiert. Sei $A := \{x \in \mathfrak{a} : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})$. Dann existiert ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $f(x) = A$. Es folgt der Widerspruch $x \in A = f(x) \Leftrightarrow x \notin f(x)$.

(ii) Es gilt $\mathfrak{a} \cup (1 \times \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{b} \times (1 \times \mathfrak{d})$.

(iii) Es gilt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b} \times \mathfrak{d}$.

(iv) Im Fall $\mathfrak{a} = 0$ ist $\mathfrak{c} > 0$ und $\mathfrak{a}^\mathfrak{c} = 0 \le \mathfrak{b}^\mathfrak{d}$ nach Bemerkung 8.5. Sei also $\mathfrak{a} > 0$ und $x \in \mathfrak{a}$. Dann lässt sich jede Abbildung $f\colon \mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$ zu $\hat{f} : \mathfrak{d} \to \mathfrak{b}$ fortsetzen, indem man $\hat{f}(y) = x$ für $y \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{c}$ setzt. Dies liefert eine injektive Abbildung $\mathfrak{a}^\mathfrak{c} \to \mathfrak{b}^\mathfrak{d}$, $f \mapsto \hat{f}$. $\square$

Bemerkung 8.7.

(i) (Cantors erste Antinomie) Die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Kardinalzahlen ist keine Menge: Anderenfalls wäre auch $\mathcal{M}' := \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{M}} \mathfrak{a}$ eine Menge und $2^{|\mathcal{M}'|} \subseteq \mathcal{M}'$ in Widerspruch zu $|\mathcal{M}'| < 2^{|\mathcal{M}'|}$.

(ii) (Cantors zweite Antinomie) Die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Mengen ist keine Menge (gleiches Argument).

(iii) Die *Kontinuumshypothese* besagt, dass keine Kardinalzahl echt zwischen $\mathbb{N}$ und $2^\mathbb{N}$ liegt. Dies lässt sich mit den Zermelo-Fraenkel-Axiomen weder beweisen noch widerlegen. Die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese* besagt, dass für jede unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ keine Kardinalzahl echt zwischen $\mathfrak{a}$ und $2^\mathfrak{a}$ liegt. Die ersten Kardinalzahlen würden dann lauten:
$$1, 2, \ldots, \mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, 2^{2^\mathbb{N}}, \ldots$$

(iv) Unabhängig von der Kontinuumshypothese besitzt jede Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ genau einen Nachfolger, nämlich das kleinste Elemente aus $\{|A| : A \subseteq 2^{\mathfrak{a}},\ |A| > \mathfrak{a}\}$.

Satz 8.8 (Cantor)**.** *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Kardinalzahlen mit $\mathfrak{a} \le \mathfrak{b} \ge \mathbb{N}$. Dann gilt*

(i) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$,

(ii) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ *falls* $\mathfrak{a} > 0$,

(iii) $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$ *falls* $\mathfrak{a} > 1$,

(iv) $\mathfrak{b}! = 2^{\mathfrak{b}}$

Beweis.

(i) Ist $\mathfrak{a}$ endlich, so liefert $f\colon \mathfrak{a} \cup (1 \times \mathfrak{b}) \to \mathfrak{b}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x + \mathfrak{a} & \text{falls } x \in \mathbb{N} \setminus \mathfrak{a}, \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

die gewünschte Bijektion (beachte: $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathfrak{b}$). Sei nun $\mathfrak{a}$ unendlich. Wegen $\mathfrak{b} \le \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \le \mathfrak{b} + \mathfrak{b}$ (Satz 8.6) können wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ annehmen. Es genügt eine Bijektion $2 \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ zu konstruieren. Im Fall $\mathfrak{b} = \mathbb{N}$ betrachte man $(0, n) \to 2 \cdot n$ und $(1, n) \to 2 \cdot n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\mathfrak{b}$ überabzählbar und $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare (B, α), wobei $B \subseteq \mathfrak{b}$ und $\alpha\colon 2 \times B \to B$ eine Bijektion ist. Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathfrak{b}$ ist $\mathcal{M}$ nichtleer und durch

$$(B, \alpha) \le (B', \alpha') \ :\Longleftrightarrow\ B \subseteq B',\ \alpha'_{|2\times B} = \alpha$$

geordnet. Sei $\varnothing \ne \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet. Dann ist $C := \bigcup_{(B,\alpha)\in\mathcal{N}} B \subseteq \mathfrak{b}$. Wir definieren $\beta\colon 2 \times C \to C$ durch $\beta(x) = \alpha(x)$ falls $x \in 2 \times B$ und $(B, \alpha) \in \mathcal{N}$. Offenbar ist β wohldefiniert und bijektiv. Daher ist $(C, \beta) \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Nach Zorns Lemma besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element (B, α). Enthält $\mathfrak{b} \setminus B$ eine abzählbare Teilmenge C, so existiert wie oben eine Bijektion $2 \times C \to C$ und wir können α nach $2 \times (B \cup C)$ fortsetzen. Dies widerspricht der Maximalität von (B, α). Also ist $\mathfrak{b} \setminus B$ endlich. Wie oben ist dann $\mathfrak{b} = |B| + |\mathfrak{b} \setminus B| = B$ und wir sind fertig.

(ii) Wegen $\mathfrak{b} = 1 \times \mathfrak{b} \le \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \le \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ können wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ annehmen. Es genügt eine Bijektion $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ zu konstruieren. Der Fall $\mathfrak{b} = \mathbb{N}$ wurde in Beispiel 7.5 erledigt. Sei nun $\mathfrak{b}$ überabzählbar und $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare (B, α), wobei $B \subseteq \mathfrak{b}$ und $\alpha\colon B \times B \to B$ eine Bijektion ist. Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathfrak{b}$ ist $\mathcal{M}$ nichtleer und durch

$$(B, \alpha) \le (B', \alpha') \ :\Longleftrightarrow\ B \subseteq B',\ \alpha'_{|B\times B} = \alpha$$

geordnet. Sei $\varnothing \ne \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet. Dann ist $C := \bigcup_{(B,\alpha)\in\mathcal{N}} B \subseteq \mathfrak{b}$. Wir definieren $\beta\colon C \times C \to C$ durch $\beta(x) = \alpha(x)$ falls $x \in B \times B$ und $(B, \alpha) \in \mathcal{N}$. Offenbar ist β wohldefiniert und bijektiv. Daher ist $(C, \beta) \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Nach Zorns Lemma besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element (B, α). Im Fall $B < \mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{b} = |B| + |\mathfrak{b} \setminus B| = |\mathfrak{b} \setminus B|$ nach (i). Insbesondere existiert $C \subseteq \mathfrak{b} \setminus B$ mit $|C| = |B|$. Wegen $|C \times C| = |B \cdot B| = |B| = |C| = |B \times C| = |C \times B|$ und $|B \cup C| = |B| + |C| = |C| + |C| \overset{\text{(i)}}{=} |C|$ existiert eine Bijektion

$$(B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C) \to C.$$

Also lässt sich α zu

$$(B \cup C) \times (B \cup C) = (B \times B) \cup (B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)$$

fortsetzen. Dies widerspricht der Maximalität von (B, α). Also ist $\mathfrak{b} = B$ und wir sind fertig.

(iii) Nach (ii) gilt $2^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}} \leq (2^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$.

(iv) Wegen $\mathfrak{b}! = |\mathrm{Sym}(\mathfrak{b})| \leq |\mathcal{P}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b})| = |\mathcal{P}(\mathfrak{b})| = 2^{\mathfrak{b}}$ genügt es eine injektive Abbildung $f\colon \mathcal{P}(\mathfrak{b}) \to \mathrm{Sym}(2\times\mathfrak{b})$, $B \mapsto f_B$ zu konstruieren. Dies ist durch

$$f_B(i,x) := \begin{cases} (1,x) & \text{falls } i = 0, x \in B, \\ (0,x) & \text{falls } i = 1, x \in B, \\ (i,x) & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

getan. □

Bemerkung 8.9. Die Potenzierung beliebiger Kardinalzahlen lässt sich nicht immer vereinfachen.

Satz 8.10 (König)**.** *Seien $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ und $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$ Familien von Kardinalzahlen mit $\mathfrak{a}_i < \mathfrak{b}_i$ für alle $i \in I$. Dann gilt*

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i < \prod_{i\in I} \mathfrak{b}_i.$$

Beweis. Nach dem Auswahlaxiom existieren $y_i \in \mathfrak{b}_i \setminus \mathfrak{a}_i$ für alle $i \in I$. Dann ist die Abbildung $\bigcup_{i\in I}\{i\}\times\mathfrak{a}_i \to \bigtimes_{i\in I}\mathfrak{b}_i$, $(j,x) \mapsto f$ mit

$$f(i) := \begin{cases} x & \text{falls } i = j, \\ y_i & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

injektiv. Dies zeigt $\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i \leq \prod_{i\in I}\mathfrak{b}_i$. Nehmen wir an es existiert eine Bijektion

$$\begin{aligned} \alpha\colon \bigcup_{i\in I}\{i\}\times\mathfrak{a}_i &\to \bigtimes_{i\in I}\mathfrak{b}_i, \\ (i,x) &\mapsto \alpha_x. \end{aligned}$$

Für $i \in I$ ist $|\{\alpha_x(i) : x \in \mathfrak{a}_i\}| \leq \mathfrak{a}_i < \mathfrak{b}_i$. Daher existieren $f(i) \in \mathfrak{b}_i \setminus \{\alpha_x(i) : x \in \mathfrak{a}_i\}$ für alle $i \in I$. Dann wäre aber $f \in \bigtimes_{i\in I}\mathfrak{b}_i$ nicht im Bild von α. □

Definition 8.11. Für eine Menge A und $\sigma \in \mathrm{Sym}(A)$ sei $\operatorname{supp}\sigma := \{a \in A : \sigma(a) \neq a\} \subseteq A$ der *Träger* von σ.

Satz 8.12. *Für jede unendliche Menge A gilt*

$$\begin{aligned} |\{B \subseteq A : |B| < \infty\}| &= |A|, \\ |\{\sigma \in \mathrm{Sym}(A) : |\operatorname{supp}\sigma| < \infty\}| &= |A|. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$|A| = |\{\{a\} : a \in A\}| \leq |\{B \subseteq A : |B| < \infty\}| \leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |A|^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A| = |\mathbb{N}|\cdot|A| = |A|.$$

Daraus folgt

$$|\{\sigma \in \mathrm{Sym}(A) : |\operatorname{supp}\sigma| < \infty\}| \leq \sum_{\substack{B,C\subseteq A,\\ |B|=|C|<\infty}} |\{B \to C\}| \leq \Big(\sum_{\substack{B\subseteq A,\\ |B|<\infty}} |B|^2\Big)^2 \leq (|A|\cdot|\mathbb{N}|^2)^2 = |A|. \quad \square$$

9 Konstruktion von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Bemerkung 9.1. Bisher können wir natürliche Zahlen nur addieren, multiplizieren und potenzieren. Um entsprechende Umkehroperationen zu definieren, müssen wir $\mathbb{N}$ durch größere Mengen ersetzen. Im Folgenden werden wir das Multiplikationssymbol $\cdot$ der Übersicht halber oft einsparen.

Definition 9.2.

(i) Offenbar definiert

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a+d=b+c$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Die Äquivalenzklassen $[a,b]$ bilden die Menge $\mathbb{Z}$ der *ganzen Zahlen*. Für $[a,b],[c,d]\in\mathbb{Z}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
[a,b]+[c,d] &:= [a+c,b+d],\\
[a,b]-[c,d] &:= [a+d,b+c],\\
[a,b]\cdot[c,d] &:= [ac+bd,ad+bc],\\
[a,b]\le[c,d] &:\Leftrightarrow a+d\le b+c,
\end{aligned}$$

Man nennt $z\in\mathbb{Z}$ *gerade* (bzw. *ungerade*), falls (k)ein $w\in\mathbb{Z}$ mit $z=w+w$ existiert.

(ii) Offenbar definiert

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; ad=bc$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$. Die Äquivalenzklassen $[a,b]$ bilden die Menge $\mathbb{Q}$ der *rationalen Zahlen*. Für $[a,b],[c,d]\in\mathbb{Q}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
[a,b]+[c,d] &:= [ad+bc,bd],\\
[a,b]-[c,d] &:= [ad-bc,bd],\\
[a,b]\cdot[c,d] &:= [ac,bd],\\
[a,b]:[c,d] &:= [ad,bc] \text{ falls } c\ne 0,\\
[a,b]\le[c,d] &:\Leftrightarrow ad\le bc.
\end{aligned}$$

Bemerkung 9.3.

(i) Durch $n\mapsto[n,0]$ kann man $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ auffassen. Jedes weitere Element aus $\mathbb{Z}$ hat die Form $-n:=[0,n]$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Es gilt dann $\mathbb{Z}=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$ und $m-n=m+(-n)$ für $m,n\in\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $m-m=0$.

(ii) Durch $z\mapsto[z,1]$ kann man $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ einbetten. Allgemeiner schreibt man $[a,b]\in\mathbb{Q}$ in der Form a/b oder $\frac{a}{b}$. Es gilt dann $a:b=\frac{a}{b}$ für $a,b\in\mathbb{Z}$. Für $q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ ist außerdem $q:q=1$.

(iii) Man zeigt leicht, dass die angegebenen Rechenoperationen wohldefiniert sind und die entsprechenden Operationen auf $\mathbb{N}$ fortsetzen. Für $a\in\mathbb{Q}$ und $z\in\mathbb{Z}$ setzt man zusätzlich

$$a^z := \begin{cases}\prod_{x\in z} a & \text{falls } z\ge 0,\\ \prod_{x\in -z}\frac{1}{a} & \text{falls } z<0.\end{cases}$$

Es gelten dann die in Satz 8.4 formulierten Regeln auch in $\mathbb{Q}$ (sofern definiert). Die Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$ ist total und ebenfalls mit der Ordnung auf $\mathbb{N}$ kompatibel.

Satz 9.4 (Cantors erste Diagonalisierung)**.** *Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $\mathbb{Z}$ eine Menge von Äquivalenzklassen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Durch Wahl eines Repräsentantensystems kann man $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auffassen. Nach Beispiel 7.5 ist $\mathbb{N} \le |\mathbb{Z}| \le |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \mathbb{N}$. Analog kann man $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ auffassen und es folgt $\mathbb{N} \le |\mathbb{Q}| \le |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \mathbb{N}$. □

Bemerkung 9.5.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \\ n \mapsto &\begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

ist eine explizite Bijektion. Dennoch sind $(\mathbb{N}, \le)$ und $(\mathbb{Z}, \le)$ nicht isomorph, denn $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element, aber $\mathbb{Z}$ nicht.

(ii) Die Calkin-Wilf-*Folge* $\mathbb{Q} = \{q_0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \ldots\}$ mit $q_0 := 0$ und

$$q_{n+1} := \frac{1}{2\lfloor q_n \rfloor + 1 - q_n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ liefert eine explizite Bijektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ (ohne Beweis). Dabei ist $\lfloor q \rfloor$ die größte ganze Zahl z mit $z \le q$. Dennoch ist $(\mathbb{Q}, \le)$ weder zu $(\mathbb{N}, \le)$ noch zu $(\mathbb{Z}, \le)$ isomorph, denn ist $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus, so wäre

$$|\{q \in \mathbb{Q} : 0 \le q \le 1\}| = |\{z \in \mathbb{Z} : f(0) \le z \le f(1)\}| < \infty.$$

Definition 9.6. Ein *Dedekind-Schnitt* ist eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{Q}$ mit den Eigenschaften:

- $\varnothing \ne D \ne \mathbb{Q}$,
- D besitzt kein größtes Element,
- $\forall d \in D : \mathbb{Q}^{<d} \subseteq D$.

Die Dedekind-Schnitte bilden die Menge $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ der *reellen Zahlen*. Durch $q \mapsto \mathbb{Q}^{<q}$ lassen sich die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ einbetten. Insbesondere ist $0 \in \mathbb{R}$. Für Dedekind-Schnitte D und E definieren wir

$$\begin{aligned} D \le E &:\Leftrightarrow D \subseteq E, \\ D + E &:= \{d + e : d \in D,\ e \in E\}, \\ -D &:= \{x \in \mathbb{Q} : \forall d \in D : x < -d\}, \\ D - E &:= D + (-E), \\ D \cdot E &:= \begin{cases} \{x \in \mathbb{Q} : \exists d \in D, e \in E : d > 0, e > 0, x < de\} & \text{falls } D, E > 0, \\ -((-D) \cdot E) & \text{falls } D < 0, E > 0, \\ -(D \cdot (-E)) & \text{falls } D > 0, E < 0, \\ (-D) \cdot (-E) & \text{falls } D, E < 0, \\ 0 & \text{falls } D = 0 \vee E = 0, \end{cases} \\ \frac{1}{D} &:= \begin{cases} \{x \in \mathbb{Q} : \exists d \in D : d > 0, x < \frac{1}{d}\} & \text{falls } D > 0, \\ -\frac{1}{-D} & \text{falls } D < 0, \end{cases} \\ D : E &:= D \cdot \frac{1}{E} \qquad \text{falls } E \ne 0. \end{aligned}$$

Man nennt $r \in \mathbb{R}$ *positiv* (bzw. *negativ*), falls $r > 0$ (bzw. $r < 0$).

Bemerkung 9.7. Die Operationen auf $\mathbb{R}$ setzen die Operationen auf $\mathbb{Q}$ fort und es gelten die in Satz 8.4 formulierten Rechenregeln (soweit definiert). Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist total und setzt die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ fort. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} a \le b &\implies a + c \le b + c, \\ a, b \ge 0 &\implies ab \ge 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$. Damit wird $\mathbb{R}$ ein *angeordneter Körper.*

Lemma 9.8. *Besitzt $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine obere Schranke, so ist*

$$\sup M := \bigcup_{r \in M} r \in \mathbb{R}$$

die kleinste obere Schranke von M. Man nennt $\sup M$ das Supremum *von M.*

Beweis. Ist $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von M, so ist s auch eine obere Schranke von $D := \bigcup_{r \in M} r \subseteq \mathbb{Q}$, d. h. $D \subseteq s$. Insbesondere ist $D \neq \mathbb{Q}$. Existiert ein größtes Element x in D, so wäre x auch ein größtes Element von einem $r \in M$. Dies widerspricht der Eigenschaften von Dedekind-Schnitten. Also besitzt D kein größtes Element. Für alle $d \in D$ ist $\mathbb{Q}^{<d} \subseteq D$. Daher ist $D \in \mathbb{R}$ die kleinste obere Schranke von M. □

Lemma 9.9. *Jede reelle Zahl ist das Supremum rationaler Zahlen, d. h. $\mathbb{Q}$ liegt* dicht *in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $q_n \in \mathbb{Q}$ maximal mit den Eigenschaften $n! \cdot q_n \in \mathbb{Z}$ und $q_n \in r$. Sicher ist dann $\sup\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \le r$. Sei $x \in r$ beliebig. Da r kein größtes Element besitzt, existiert ein $y \in r$ mit $x < y$. Wir schreiben $r = \frac{k}{m}$ mit $k, m \in \mathbb{Z}$ und $m > 0$. Die Maximalität von q_m zeigt $y \le q_m$ und $x \in \mathbb{Q}^{<q_m}$. Dies zeigt $r = \sup\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Satz 9.10 (Cantors zweite Diagonalisierung)**.** *Es gilt $|\mathbb{R}| = 2^{\mathbb{N}}$. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ überabzählbar.*

Beweis. Wegen $|\mathbb{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\mathbb{N}}$ genügt es eine injektive Abbildung $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ zu konstruieren. Für $f \in 2^{\mathbb{N}}$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $f_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{3^k} \in \mathbb{Q}$. Durch Induktion nach n zeigt man

$$f_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{3^{n+1} - 1}{2 \cdot 3^n} \le \frac{3}{2}.$$

Daher ist $\frac{3}{2}$ eine obere Schranke von $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ und nach Lemma 9.8 existiert

$$S_f := \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Sei nun $g \in 2^{\mathbb{N}}$ mit $S_g = S_f$. Im Fall $f \neq g$ existiert ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \neq g(n)$. O. B. d. A. sei $f(n) = 0$ und $g(n) = 1$. Für alle $m \ge n$ gilt dann

$$f_m + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \le f_m + \frac{3^{m-n} + 1}{2 \cdot 3^m} = f_m + \frac{1}{3^n} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{3^k} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{g(k)}{3^k} \le g_m \le S_g = S_f.$$

Wegen $f_0 \le f_1 \le \ldots \le f_n$ wäre dann auch $S_f - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ eine obere Schranke von $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ im Widerspruch zur Minimalität von S_f. Also ist die Abbildung $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $f \to S_f$ injektiv. □

Bemerkung 9.11.

(i) In der Analysis schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{3^n} := \lim_{k\to\infty} f_k := S_f$$

in der Situation des obigen Beweises. Die konstruierte Abbildung $f \mapsto S_f$ bildet nur in die Menge $\{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r \leq \frac{3}{2}\}$ ab. Durch Skalierung ist daher bereits jedes *Intervall* $\{r \in \mathbb{R} : a \leq r \leq b\}$ mit $a < b$ überabzählbar.

(ii) Hat man bereits bewiesen, dass sich reelle Zahlen durch unendliche Dezimalentwicklungen schreiben lassen (oder definiert man $\mathbb{R}$ auf diese Weise), so gibt es ein anschauliches Argument für $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$: Angenommen $\mathbb{R} = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Konstruiere $x = x_1{,}x_2x_3\ldots$, sodass $x_i - 1$ die i-te Dezimalziffer von r_i ist (für $x_i = 0$ sei $x_i - 1 = 9$). Beispiel:

$$\begin{aligned} r_1 &= \mathbf{1}{,}0000\ldots, \\ r_2 &= 0{,}\mathbf{0}234\ldots, \\ r_3 &= 11{,}4\mathbf{9}02\ldots \\ r_4 &= 3{,}14\mathbf{1}5\ldots \\ &\vdots \\ x &= 2{,}102\ldots \end{aligned}$$

Wegen $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = r_n$. Andererseits unterscheiden sich x und r_n an der n-ten Dezimalziffer. Widerspruch.

(iii) Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man *irrational*. Wegen $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$ gibt es „mehr" irrationale Zahlen als rationale. Wir konstruieren ein Beispiel.

Lemma 9.12. *Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ und $s^n = r$.*

Beweis. Hat man s konstruiert, so gilt $1/s > 0$ und $(1/s)^n = 1/r$. Wir können also $r \geq 1$ annehmen, indem man notfalls r durch $1/r$ ersetzt. Für $r = 1$ wählt man $s = 1$. Sei also $r > 1$. Für jedes $t > r$ ist dann $t^n > r^n$. Daher existiert $s := \sup\{q \in \mathbb{Q} : q^n < r\}$. Nehmen wir zunächst $s^n < r$ an. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existieren nach Lemma 9.9 $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 < a < b$, $b - a < \frac{1}{k}$ und $b^n < r$. Es gilt dann

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}) < \frac{1}{k} n b^{n-1} \leq \frac{nr}{k}.$$

Daher gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $s^n < \frac{a^n}{b^n} < r$. Dann ist $s < \frac{a}{b}$ im Widerspruch zur Wahl von s. Im Fall $r < s^n$ findet man analog $a, b \in \mathbb{N}$ mit $r < \frac{a^n}{b^n} < s^n$. Dann wäre auch $\frac{a}{b} < s$ eine obere Schranke von $\{q \in \mathbb{Q} : q^n < r\}$. Also ist $s^n = r$.

Sei auch $t > 0$ mit $t^n = r$. Dann ist

$$(s-t)(s^{n-1} + s^{n-2}t + \ldots + st^{n-1} + t^{n-1}) = s^n - t^n = 0.$$

Wegen $s^{n-1} + s^{n-2}t + \ldots + st^{n-2} + t^{n-1} > 0$ folgt $s = t$. □

Bemerkung 9.13. In der Situation von Lemma 9.12 nennt man $\sqrt[n]{r} := s$ die n-te *Wurzel* von r. Für $n = 2$ nennt man $\sqrt{r} := \sqrt[2]{r}$ die *Quadratwurzel* von r.

Satz 9.14. *Die Quadratwurzel von 2 ist irrational.*

Beweis. Im Fall $w := \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $w = \frac{a}{b}$. Dabei können wir annehmen, dass $b \in \mathbb{N}$ so klein wie möglich ist. Es folgt $2b^2 = a^2$. Insbesondere ist a^2 gerade. Wäre a ungerade, sagen wir $a = 2k + 1$, so wäre auch

$$a^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ungerade. Daher ist a gerade, sagen wir $a = 2c$. Dann ist $2b^2 = 4c^2$ und $b^2 = 2c^2$. Also ist auch b gerade, sagen wir $b = 2d$. Schließlich ist $w = \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$ im Widerspruch zur Wahl von b. $\square$

Bemerkung 9.15. Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $r^2 \geq 0$. Daher existiert kein $r \in \mathbb{R}$ mit $r^2 = -1$. Wir erweitern daher $\mathbb{R}$, um auch Wurzeln negativer Zahlen ziehen zu können.

Definition 9.16. Wir definieren die Menge der *komplexen Zahlen* durch $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Komplexe Zahlen $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreibt man in der Form $a + b\mathrm{i}$. Dabei heißt a *Realteil* und b *Imaginärteil*. Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\begin{aligned}
(a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\
(a,b) - (c,d) &:= (a-c, b-d), \\
(a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - bd, ab + bc), \\
(a,b) : (c,d) &:= \Big(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{ab+bc}{c^2+d^2}\Big) \qquad \text{(falls } (c,d) \neq 0).
\end{aligned}$$

Bemerkung 9.17.

(i) Durch $a \mapsto a + 0\mathrm{i}$ kann man $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ einbetten. Wie üblich ist dies mit den Rechenoperationen verträglich.

(ii) Mit Hilfe der *Exponentionalfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ und ihrer Umkehrfunktion, dem *natürlichen Logarithmus*, lässt sich a^b für beliebige komplexe Zahlen definieren.

(iii) Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ gibt es auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation, die mit den Rechenoperationen verträglich ist. Denn wegen $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$ kann weder $\mathrm{i} \geq 0$ noch $\mathrm{i} \leq 0$ gelten.

(iv) (Fundamentalsatz der Algebra) Sind $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ beliebig, so existiert stets ein (oder mehrere) $x \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

(ohne Beweis). Beispielsweise ist $\mathrm{i}^2 = -1$. Dies verallgemeinert Lemma 9.12.

(v) Sind $a_0, \ldots, a_n$ in (iv) rational, so nennt man x *algebraisch*. Die Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar. Die Elemente der überabzählbaren Menge $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ heißen *transzendente* Zahlen. Zum Beispiel ist die LIOUVILLE*sche Konstante*

$$\xi := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{10^{n!}} \in \mathbb{R}$$

transzendent (ohne Beweis).

(vi) Neben den komplexen Zahlen gibt es mindestens zwei alternative Erweiterungen der reellen Zahlen, die wir im Abschnitt 12 kennen lernen.

10 Endliche Mengen

Definition 10.1. Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ nennt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}$$

den *Binomialkoeffizienten* von n über k. Der folgende Satz zeigt $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Satz 10.2. *Sei A eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Für alle $k \leq n$ gilt dann*

$$|\{B \subseteq A : |B| = k\}| = \binom{n}{k}.$$

Beweis. Es gibt $|\mathrm{Sym}(B)| = k!$ Möglichkeiten die Elemente einer k-elementigen Teilmenge $B = \{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq A$ aufzulisten. Für die Wahl von b_1 gibt es n Möglichkeiten. Danach bleiben noch $|A \setminus \{b_1\}| = n-1$ Möglichkeiten für die Wahl von b_2 usw. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen ist daher $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. $\square$

Bemerkung 10.3. (i) Für $0 < k \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Induktiv folgt

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \ldots > \binom{n}{n} = 1,$$

wobei $\lceil n/2 \rceil$ das kleinste $z \in \mathbb{Z}$ mit $n/2 \leq z$ bezeichnet (PASCALsches Dreieck).

(ii) In der Situation von Satz 10.2 gilt

$$2^n = 2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{n} |\{B \subseteq A : |B| = k\}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Dies ist ein Spezialfall der *binomischen Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (a, b \in \mathbb{C}),$$

die man mit vollständiger Induktion und (i) beweisen kann.

Satz 10.4 (Inklusions-Exklusions-Prinzip)**.** *Für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

Beweis. Wir zählen wie oft ein Element $a \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ auf der rechten Seite berücksichtigt wird. Dafür sei o. B. d. A. $a \in A_1 \cap \ldots \cap A_l$ und $a \notin A_i$ für $i > l$. Dann wird a genau dann gezählt, wenn $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, l\}$ gilt. Im k-ten Summanden wird a also $(-1)^{k+1}\binom{l}{k}$-mal gezählt nach Satz 10.2. Insgesamt wird a auf der rechten Seite genau

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{l}{k} = 1 - \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k}\binom{l}{k} \overset{10.3}{=} 1 - (1-1)^l = 1$$

Mal gezählt. Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 10.5 (Halls Heiratssatz). *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge M mit $|I| < \infty$ oder $\forall i \in I : |M_i| < \infty$. Genau dann existieren paarweise verschiedene $x_i \in M_i$ für $i \in I$, wenn $|\bigcup_{i\in J} M_i| \ge |J|$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt.*

Beweis. Für $J \subseteq I$ schreiben wir $M_J := \bigcup_{i\in J} M_i$. Nehmen wir an, dass paarweise verschiedene $x_i \in M_i$ existieren (man nennt $(x_i)_{i\in I}$ ein *Vertretersystem*). Offenbar ist dann $|M_J| \ge |\{x_i : i \in J\}| = |J|$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$. Sei umgekehrt die Bedingung

$$|M_J| \ge |J| \qquad (J \subseteq I,\ |J| < \infty) \tag{10.1}$$

erfüllt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $|I| < \infty$.
Induktion nach $n := |I|$: Der Fall $n \le 1$ ist offensichtlich. Sei also $n > 1$ und o. B. d. A. $I = \{1, \ldots, n\}$. Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt *kritisch*, falls $1 \le |M_J| = |J| < n$ gilt.

Nehmen wir zunächst an, dass keine kritischen Teilmengen existieren. Wegen $|M_1| = |M_{\{1\}}| \ge 1$ existiert ein $x_1 \in M_1$. Für $i \in J := \{2, \ldots, n\}$ sei $N_i := M_i \setminus \{x_1\}$. Für jede Teilmenge $K \subseteq J$ gilt dann $|N_K| \ge |M_K| - 1 \ge |K|$, denn K ist nicht kritisch. Also erfüllt $(N_i)_{i\in J}$ Bedingung (10.1) und nach Induktion existiert ein Vertretersystem $(x_i)_{i\in J}$ von $(N_i)_{i\in J}$. Sicher ist dann $(x_i)_{i\in I}$ ein Vertretersystem für $(M_i)_{i\in I}$.

Nehmen wir schließlich an, dass eine kritische Teilmenge $J \subseteq I$ existiert. Dann gilt $1 \le m := |J| = |M_J| < n$. Nach Induktion besitzt $(M_i)_{i\in J}$ ein Vertretersystem $(x_i)_{i\in J}$. Für $i \in I \setminus J$ sei $N_i := M_i \setminus M_J$. Für jede Teilmenge $K \subseteq I \setminus J$ gilt dann

$$|N_K| = |M_K \setminus M_J| = |M_{K\cup J}| - |M_J| \ge |K \cup J| - m = |K| + |J| - m = |K|,$$

d. h. $(N_i)_{i\in I\setminus J}$ erfüllt (10.1). Nach Induktion existiert ein Vertretersystem $(x_i)_{i\in I\setminus J}$. Nach Konstruktion ist dann $(x_i)_{i\in I}$ ein Vertretersystem für $(M_i)_{i\in I}$.

Fall 2: $\forall i \in I : |M_i| < \infty$.
Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Familien $(N_i)_{i\in I}$ mit $N_i \subseteq M_i$ (für alle $i \in I$), für die (10.1) gilt. Wegen $(M_i)_{i\in I} \in \mathcal{M}$ ist $\mathcal{M}$ nichtleer und durch

$$(N_i)_{i\in I} \le (N'_i)_{i\in I} \ :\Longleftrightarrow\ \forall i \in I : N_i \subseteq N'_i$$

geordnet. Sei $\varnothing \ne \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ eine total geordnete Teilmenge und $K_j := \bigcap_{(N_i)_{i\in I}\in\mathcal{N}} N_j$ für $j \in I$. Dann ist $(K_i)_{i\in I} \le (N_i)_{i\in I}$ für alle $(N_i)_{i\in I} \in \mathcal{N}$. Sei $J \subseteq I$ eine endliche Teilmenge und $j \in J$. Wegen $|M_j| < \infty$ existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$ mit

$$K_j = \bigcap_{(N_i)_{i\in I}\in\mathcal{N}_1} N_j$$

für alle $j \in J$. Da $\mathcal{N}$ total geordnet ist, besitzt $\mathcal{N}_1$ ein kleinstes Element $(N_i)_{i\in I}$. Offenbar ist dann $(K_j)_{j\in J} = (N_j)_{j\in J}$. Insbesondere ist $|K_J| = |N_J| \geq |J|$. Dies zeigt, dass $(K_i)_{i\in I}$ Bedingung (10.1) erfüllt und somit eine untere Schranke von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ ist. Nach Zorns Lemma existiert ein minimales Element $(N_i)_{i\in I} \in \mathcal{M}$. Da jedes Vertretersystem von $(N_i)_{i\in I}$ auch ein Vertretersystem von $(M_i)_{i\in I}$ ist, können wir $(M_i)_{i\in I}$ durch $(N_i)_{i\in I}$ ersetzen und $\mathcal{M} = \{(M_i)_{i\in I}\}$ annehmen.

Sei $x \in M_I$ und $N_i := M_i \setminus \{x\}$ für $i \in I$. Wegen $(N_i)_{i\in I} \notin \mathcal{M}$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $|M_J| - 1 \leq |N_J| < |J| \leq |M_J|$. Es folgt $|M_J| = |J|$ und $x \in M_J$. Wir definieren nun

$$N_i := \begin{cases} M_i & \text{falls } i \in J, \\ M_i \setminus M_J & \text{falls } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

Sei $K \subseteq I$ endlich. Dann gilt

$$\begin{aligned} |N_K| &= |N_{K\cap J} \cup N_{K\setminus J}| = |M_{K\cap J}| + |M_{K\setminus J} \setminus M_J| \\ &= |M_{K\cap J}| + |M_{K\cup J}| - |M_J| \geq |K \cap J| + |K \cup J| - |J| = |K|. \end{aligned}$$

Dies zeigt $(N_i)_{i\in I} \in \mathcal{M} = \{(M_i)_{i\in I}\}$ und $M_i \cap M_J = \varnothing$ für $i \in I \setminus J$. Es folgt $M_{I\setminus J} \cap M_J = \varnothing$. Nach Fall 1 existieren paarweise verschiedene $x_i \in M_i$ für $i \in J$. Setzt man nun

$$N_i := \begin{cases} \{x_i\} & \text{falls } i \in J, \\ M_i & \text{falls } i \in I \setminus J, \end{cases}$$

so erfüllt $(N_i)_{i\in I}$ wieder (10.1). Also gilt $M_i = \{x_i\}$ für $i \in J$. Da x beliebig gewählt war, gilt sogar $|M_i| = 1$ für alle $i \in I$. Offenbar sind die M_i auch paarweise disjunkt und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 10.6. Satz 10.5 gilt nicht für $I = \mathbb{N}$, wenn nicht alle M_i endlich sind: Wähle $M_0 := \mathbb{N}$ und $M_i := \{i - 1\}$ für $i \geq 1$.

Definition 10.7. Jede total geordnete Teilmenge K einer endlichen geordneten Menge M hat die Form $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Man nennt K daher auch *Kette*. Eine Kette von M heißt *maximal*, wenn sie in keiner größeren Kette von M enthalten ist. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *Antikette* von M, falls $x \leq y \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$ gilt.

Satz 10.8 (SPERNER). *Sei M eine n-elementige Menge und A eine größtmögliche Antikette von $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Dann gilt*

$$A = \{N \subseteq M : |N| = \lfloor n/2 \rfloor\} \text{ oder } A = \{N \subseteq M : |N| = \lceil n/2 \rceil\}.$$

Insbesondere ist $|A| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Beweis (LUBELL). Offenbar hat jede maximale Kette in $\mathcal{P}(M)$ die Form $M_0 \subset \ldots \subset M_n$ mit $|M_k| = k$ für $k = 0, \ldots, n$. Es gibt n Möglichkeiten für M_1. Ist M_1 fest, so verbleiben noch $n - 1$ Möglichkeiten für M_2 usw. Also gibt es genau $n!$ maximale Ketten in $\mathcal{P}(M)$. Sei nun $N \subseteq M$ fest mit $|N| = k$. Dann gibt es genau $k!(n - k)!$ maximale Ketten, die N enthalten (für M_1 gibt es k Möglichkeiten, für M_2 gibt es $k - 1$ Möglichkeiten, ..., für $M_k = N$ gibt es eine Möglichkeit, für M_{k+1} gibt es $n - k$ Möglichkeiten usw.). Für $x \in A$ sei K_x die Menge aller maximalen Ketten, die x enthalten. Enthält eine (maximale) Kette sowohl x als auch y, so gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Daher sind die Mengen K_x mit $x \in A$ paarweise disjunkt. Dies zeigt

$$\sum_{x\in A} |x|!(n - |x|)! = \sum_{x\in A} |K_x| = \Big|\bigcup_{x\in A} K_x\Big| \leq n!. \tag{10.2}$$

Division durch $n!$ liefert

$$|A|\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} \overset{10.3}{\leq} \sum_{x\in A}\frac{1}{\binom{n}{|x|}} \leq 1.$$

Also ist $|A| \leq \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$. Umgekehrt ist $\{N \subseteq M : |N| = \lfloor n/2\rfloor\}$ sicher eine Antikette mit $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ Elementen (Satz 10.2). Es folgt $|A| = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ und $\binom{n}{|x|} = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ für alle $x \in A$. Daher besteht A nur aus Teilmengen $N \subseteq M$ mit $\lfloor n/2\rfloor \leq |N|\lceil n/2\rceil$. Ist n gerade, so sind wir fertig.

Sei nun $n = 2m + 1$ ungerade. Aus (10.2) folgt $\sum_{x\in A}|K_x| = n!$, das heißt, alle maximalen Ketten enthalten (genau) ein Element aus A. Nehmen wir nun indirekt an, dass $S, T \subseteq M$ mit $|S| = |T| = m + 1$, $S \in A$ und $T \notin A$ existieren. Bei geeigneter Nummerierung gilt $S = \{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ und $T = \{x_i, \ldots, x_{m+i}\}$. Wegen $T \notin A$ existiert ein $j \geq 1$ mit $S' := \{x_j, \ldots, x_{m+j}\} \in A$ und $T' := \{x_{j+1}, \ldots, x_{m+j+1}\} \notin A$. Es gilt $|S' \cap T'| = m$. Wegen $S' \cap T' \subseteq S' \in A$ ist $S' \cap T' \notin A$. Sicher existiert eine Kette, die $S' \cap T'$ und T' enthält. Wegen $A \subseteq \{N \subseteq M : |N| \in \{m, m + 1\}\}$ müsste eine dieser Menge in A liegen. Dies widerspricht aber $T' \notin A$. □

Satz 10.9 (Mirsky)**.** *Sei M eine endliche geordnete Menge und m die größte Mächtigkeit einer Kette in M. Dann ist M eine Vereinigung von m Antiketten, aber nicht die Vereinigung von weniger Antiketten.*

Beweis. Für $x \in M$ sei $f(x) \geq 1$ die größte Mächtigkeit einer Kette, die bei x endet. Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Im Fall $x < y$ könnte man die jede Kette, die bei x endet um y verlängern. Dann wäre aber $f(y) > f(x)$. Daher ist $x \not\leq y \not\leq x$. Also sind die Urbilder $A_n := f^{-1}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ Antiketten. Nach Voraussetzung ist $f(x) \leq m$ für alle $x \in M$. Dies zeigt $M = A_1 \cup \ldots \cup A_m$.

Sei umgekehrt $M = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ für Antiketten $A_1, \ldots, A_k$. Sei $K \subseteq M$ eine Kette mit $|K| = m$. Dann gilt $|K \cap A_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, k$. Dies zeigt $k \geq |K| = m$. □

Satz 10.10 (Dilworth)**.** *Sei M eine endliche geordnete Menge und m die größte Mächtigkeit einer Antikette in M. Dann ist M eine Vereinigung von m Ketten, aber nicht die Vereinigung von weniger Ketten.*

Beweis (Galvin). Ist M die Vereinigung der Ketten $K_1, \ldots, K_s$, so gilt $|A \cap K_i| \leq 1$ für jede Antikette A. Dies zeigt $s \geq m$. Für die umgekehrte Ungleichung argumentieren wir durch Induktion nach $|M|$. Für $M = \varnothing$ ist die Behauptung klar. Sei also $M \neq \varnothing$ und sei $x \in M$ ein maximales Element. Besitzt $M' := M \setminus \{x\}$ keine Antikette mit m Elementen, so ist M' nach Induktion eine Vereinigung von $m - 1$ Ketten. Sicher ist dann M eine Vereinigung von m Ketten. Sei nun $A \subseteq M'$ eine Antikette mit $|A| = m$. Nach Induktion existieren o. B. d. A. disjunkte Ketten $K_1, \ldots, K_m$ mit $M' = K_1 \cup \ldots \cup K_m$. Dabei gilt $|A \cap K_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei

$$x_i := \max \bigcup_{\substack{A\subseteq M' \text{ Antikette} \\ |A|=m}} K_i \cap A$$

für $i = 1, \ldots, m$. Angenommen es gilt $x_i \leq x_j$. Sei $A \subseteq M'$ eine Antikette mit $x_j \in A$ und $|A| = m$. Sei $x_i' \in A \cap K_i$. Dann gilt $x_i' \leq x_i \leq x_j$. Wegen $x_i', x_j \in A$ folgt $x_i' = x_i = x_j$ und $i = j$, da $K_i \cap K_j = \varnothing$. Daher ist $A := \{x_1, \ldots, x_m\}$ eine m-elementige Antikette von M'. Nach Voraussetzung ist $A \cup \{x\}$ keine Antikette. Da x maximal in M ist, gilt $x_i < x$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$. Also ist $K_i' := K_i \cup \{x\}$ eine Kette und M ist die Vereinigung der Ketten $K_1, \ldots, K_{i-1}, K_i', K_{i+1}, \ldots, K_m$. □

Satz 10.11 (Ramsey, unendliche Version). *Seien $n, k \in \mathbb{N}_+$ und M eine unendliche Menge mit $\binom{M}{k} = \mathcal{M}_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \mathcal{M}_n$. Dann existiert eine unendliche Teilmenge $A \subseteq M$ mit $\binom{A}{k} \subseteq \mathcal{M}_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Beweis. Induktion nach k: Der Fall $k = 1$ ist das (unendliche) Schubfachprinzip. Sei also $k \geq 2$. Eine vorgegebene Partition von $\binom{M}{k}$ interpretieren wir als Abbildung $f\colon \binom{M}{k} \to \{1, \ldots, n\}$. Wir definieren induktiv unendliche Mengen $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots$ und Elemente $a_i \in A_i \setminus A_{i+1}$ für $i \geq 0$, sodass

$$f_{a_i} := f(B \cup \{a_i\}) = f(C \cup \{a_i\}) \qquad \forall B, C \in \binom{A_{i+1}}{k-1}. \tag{10.3}$$

Sei $A_0 := M$ und $a_0 \in A_0$ beliebig. Seien bereits $a_i \in A_i$ definiert. Sei $g\colon \binom{A_i \setminus \{a_i\}}{k-1} \to \{1, \ldots, n\}$, $B \mapsto f(B \cup \{a_i\})$. Nach Induktion existiert eine unendliche Menge $A_{i+1} \subseteq A_i \setminus \{a_i\}$ mit $|g(\binom{A_{i+1}}{k-1})| = 1$. Somit gilt (10.3) für A_{i+1}. Wir wählen $a_{i+1} \in A_{i+1}$ beliebig.

Nach dem Schubfachprinzip existiert eine unendliche Menge $A \subseteq \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $f_a = f_b$ für alle $a, b \in A$. Damit gilt die Behauptung für A. □

Satz 10.12 (Ramsey, endliche Version). *Für $r, s, t \in \mathbb{N}_+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit folgender Eigenschaft: Für jede n-elementige Menge M und jede Partition $\binom{A}{r} = \mathcal{M}_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \mathcal{M}_s$ existiert eine t-elementige Teilmenge $A \subseteq M$ mit $\binom{A}{r} \subseteq \mathcal{M}_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$.*

Beweis. Nehmen wir indirekt an, dass die Behauptung für r, s, t falsch ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ existiert eine n-elementige Menge, o. B. d. A. $M := \{1, \ldots, n\}$ und eine Abbildung $f\colon \binom{M}{r} \to \{1, \ldots, s\}$ ohne die gewünschte Eigenschaft. Wir sagen dann: f ist *schlecht* und schreiben $M_n := \binom{M}{r}$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es unendlich viele schlechte Abbildungen (auf beliebigen M_n), die auf M_1 übereinstimmen. Sei F_1 eine solche Menge von schlechten Abbildungen und sei $f_1 : M_1 \to \{1, \ldots, s\}$ die gemeinsame Einschränkung. In F_1 gibt es unendlich viele Abbildungen, die auf M_2 übereinstimmen. Sei $F_2 \subseteq F_1$ eine solche Menge und $f_2 : M_2 \to \{1, \ldots, s\}$ die gemeinsame Einschränkung. Auf diese Weise erhalten wir schlechte Abbildungen $f_1, f_2, \ldots$ mit $(f_{n+1})_{|M_n} = f_n$ für $n \in \mathbb{N}_+$. Wir definieren nun $f\colon \binom{\mathbb{N}_+}{r} \to \{1, \ldots, s\}$ durch $f(B) := f_n(B)$ für $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Nach Satz 10.11 existiert eine t-elementige Teilemenge $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $|f(\binom{A}{r})| \leq 1$ (im Fall $t < r$ ist $\binom{A}{r} = \varnothing$). Nun gilt aber $A \subseteq M_n$ für ein n und f_n ist doch nicht schlecht. Widerspruch. □

Bemerkung 10.13. Der Fall $r = s = 2$ lässt sich graphentheoretisch interpretieren: Jeder Graph mit hinreichend vielen Ecken besitzt einen vollständigen Teilgraphen mit t Ecken oder einen trivialen Teilgraphen mit t Ecken. Um die genaue Anzahl der benötigten Ecken zu bestimmen, führt man eine asymmetrische Variante ein: Die *Ramsey-Zahl* $R(k, l)$ ist die kleinste natürliche Zahl, sodass jeder Graph mit mindestens $R(k, l)$ Ecken einen vollständigen Teilgraphen mit k Ecken oder einen trivialen Teilgraphen mit l Ecken besitzt. Offensichtlich ist $R(k, l) = R(l, k)$ (betrachte komplementären Graphen) und $R(1, l) = 1$. Jeder Graph mit l Ecken ist entweder vollständig oder besitzt einen trivialen Teilgraphen mit zwei Kanten. Dies zeigt $R(2, l) = l$.

Lemma 10.14. *Für $k, l \geq 2$ gilt*

$$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

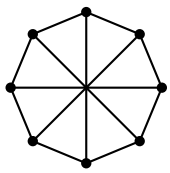
Sind $R(k-1, l)$ und $R(k, l-1)$ beide gerade, so ist $R(k, l) < R(k-1, l) + R(k, l-1)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $R(k,l) \le R(k-1,l) + R(k,l-1) =: n$. Sei G ein Graph mit n Ecken und sei $g \in G$ eine beliebige Ecke. Sei G_0 (bzw. G_1) die Menge aller zu g (nicht) benachbarten Ecken. Dann ist

$$|G_0| + |G_1| = |G_0 \dot\cup G_1| = n - 1 = R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1.$$

Es folgt $|G_0| \ge R(k-1,l)$ oder $|G_1| \ge R(k,l-1)$. O. B. d. A. sei $|G_0| \ge R(k-1,l)$. Besitzt G_0 einen vollständigen Teilgraphen mit $k-1$ Ecken, so ist $G_0 \cup \{g\}$ ein vollständiger Teilgraph von G mit k Ecken. Anderenfalls besitzt G_0 (und damit auch G) einen trivialen Teilgraphen mit l Ecken. Dies zeigt die erste Behauptung. Die zweite Ungleichung folgt induktiv aus Bemerkung 10.3. Nehmen wir nun an, dass $R(k-1,l)$ und $R(k,l-1)$ gerade sind. Sei G ein Graph mit $n-1$ Ecken. Das obige Argument funktioniert nur dann nicht, wenn $|G_0| = R(k-1,l) - 1$ und $|G_1| = R(k,l-1) - 1$ für jede Ecke g gilt. In diesem Fall besitzt jede Ecke von G die gleiche Anzahl $R(k-1,l)$ an Nachbarn. Die Anzahl aller Kanten in G ist somit $\frac{1}{2}(n-1)(|R(k-1,l)|-1)$. Nach Voraussetzung ist dies aber keine ganze Zahl. Daher ist $R(k,l) \le n-1$. $\square$

Beispiel 10.15. Aus Lemma 10.14 folgt $R(3,3) \le 6$. Ein 5-Eck (als Graph) zeigt $R(3,3) > 5$ und damit $R(3,3) = 6$. Interpretation: Unter sechs Personen gibt es drei, die sich alle kennen oder alle nicht kennen. Da $R(3,3)$ und $R(2,4) = 4$ gerade sind, folgt $R(3,4) \le 9$ aus Lemma 10.14. Der folgende Graph zeigt umgekehrt $R(3,4) \ge 9$:



Weitere bekannte Werte sind (ohne Beweis):

$R(3,5) = 14$,	$R(3,6) = 18$,	$R(3,7) = 23$,	$R(3,8) = 28$,
$R(3,9) = 36$,	$R(4,4) = 18$,	$R(4,5) = 25$.	

Satz 10.16 (DeBruijn-Erdős)**.** *Sei A eine endliche Menge und $\mathcal{A} \subseteq 2^A$ mit $2 \le |B| < |A|$ für alle $B \in \mathcal{A}$. Für je zwei verschiedene $x, y \in A$ existiere genau ein $B \in \mathcal{A}$ mit $x, y \in B$. Dann gilt $|\mathcal{A}| \ge |A|$.*

Beweis (Ivanov). Für $a \in A$ sei $f(a) := |\{B \in \mathcal{B} : a \in B\}|$. Dann gilt

$$\sum_{a \in A} f(a) = |\{(a,B) \in A \times \mathcal{A} : a \in B\}| = \sum_{B \in \mathcal{A}} |B|.$$

Für $a \notin B \in \mathcal{A}$ und $b \in B$ existiert genau ein $C_b \in \mathcal{A} \setminus \{B\}$ mit $a, b \in C_b$. Für $b \ne b'$ ist dabei $C_b \ne C_{b'}$, denn anderenfalls wären b, b' sowohl in B als auch in $C_b = C_{b'}$ enthalten. Dies zeigt $|B| \le f(a)$.

Nehmen wir nun $|\mathcal{A}| < |A|$ an. Für $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ gilt $|A \setminus B_1| \ge 1$ und $|B_1 \cap B_2| \le 1$. Dies zeigt $|\bigcup_{i=1}^n A \setminus B_i| \ge |A| - 1 \ge |\mathcal{A}| \ge n$ für $n \ge 2$. Nach Halls Heiratssatz existieren paarweise verschiedene Vertreter $\alpha(B) \in A \setminus B$ für $B \in \mathcal{A}$. Dies liefert den Widerspruch

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{B \in \mathcal{A}} |B| \le \sum_{B \in \mathcal{A}} f(\alpha(B)) < \sum_{a \in A} f(a). \qquad \square$$

11 Topologie

Definition 11.1. Sei M eine nichtleere Menge. Eine Familie von Teilmengen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt *Filter* von M, falls gilt:

- $\varnothing \neq \mathcal{F} \neq \mathcal{P}(M)$.
- $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.
- $A \supseteq B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$.

Ist $\mathcal{F}$ maximal bzgl. Inklusion, so nennt man $\mathcal{F}$ einen *Ultrafilter*.

Bemerkung 11.2. Die erste Bedingung in Definition 11.1 ist äquivalent zu $\varnothing \notin \mathcal{F}$ und $M \in \mathcal{F}$.

Beispiel 11.3.

(i) Für jede Teilmenge $\varnothing \neq A \subseteq M$ ist

$$\mathcal{F}(A) := \{B \subseteq M : A \subseteq B\}$$

ein Filter. Filter dieser Art heißen *Hauptfilter*. Insbesondere ist $\{M\}$ ein Filter von M.

(ii) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter einer endlichen Menge M. Dann existiert ein minimales Element $A \in \mathcal{F}$. Es folgt $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}$. Gäbe es ein $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(A)$, so wäre $A \cap B \in \mathcal{F}$ im Widerspruch zur Wahl von A. Daher ist jeder Filter von M ein Hauptfilter. Die Ultrafilter von M haben offenbar die Form $\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}(\{x\})$ für ein $x \in M$.

(iii) Sei nun M eine unendliche Menge und $\mathcal{F}$ die Menge aller *koendlichen* Teilmengen $A \subseteq M$ (d. h. $|M \setminus A| = \infty$). Offenbar ist $\mathcal{F}$ ein Filter, aber kein Hauptfilter. Man nennt $\mathcal{F}$ den *Fréchet-Filter* auf M.

(iv) Die Menge Ω aller Filter, die einen gegebenen Filter $\mathcal{F}$ enthalten ist durch $\subseteq$ geordnet. Man sieht leicht, dass die Vereinigung einer total geordneten Teilmenge von Ω wieder ein Filter ist. Nach Zorns Lemma existiert also stets ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ enthält.

Lemma 11.4. *Für jeden Filter $\mathcal{F}$ von $M \neq \varnothing$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter.

(2) Für alle $A \subseteq M$ gilt entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $M \setminus A \in \mathcal{F}$.

(3) Für alle $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$ mit $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$ existiert ein i mit $A_i \in \mathcal{F}$.

Beweis.

(1)⇒(2): Sei

$$\mathcal{G} := \big\{B \subseteq M : \exists F \in \mathcal{F} : A \cap F \subseteq B\big\}.$$

Ist $\varnothing \in \mathcal{G}$, so existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq M \setminus A$. Dann gilt auch $M \setminus A \in \mathcal{F}$. Anderenfalls ist $\mathcal{G}$ ein Filter, der $\mathcal{F}$ enthält. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt $A = A \cap M \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$.

(2)⇒(3): Nehmen wir $A_i \notin \mathcal{F}$ für $i = 1, \ldots, n$ an. Nach (2) gilt $M \setminus A_i \in \mathcal{F}$ für $i = 1, \ldots, n$. Da $\mathcal{F}$ ein Filter ist, folgt der Widerspruch

$$\varnothing = \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \cap \Big(M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \cap \bigcap_{i=1}^n (M \setminus A_i) \in \mathcal{F}.$$

(3)⇒(1): Angenommen $\mathcal{F}$ ist kein Ultrafilter. Dann existiert ein Filter $\mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}$ und ein $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Wegen $A \cup (M \setminus A) \in \mathcal{F}$ folgt $M \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ aus (3). Nun wäre aber $\varnothing = A \cap (M \setminus A) \in \mathcal{G}$. □

Definition 11.5. Sei M eine nichtleere Menge. Eine Familie von Teilmengen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt *Topologie* auf M, falls gilt:

- $\varnothing, M \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{T}$.
- $U, V \in \mathcal{T} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.

Die Mengen in $\mathcal{T}$ nennt man *offen*. Man nennt $A \subseteq M$ *abgeschlossen*, falls $M \setminus A$ offen ist. Das Paar $(M, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*. Sind $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ Topologien, so nennt man $\mathcal{S}$ (bzw. $\mathcal{T}$) *gröber* (bzw. *feiner*) als $\mathcal{T}$ (bzw. $\mathcal{S}$).

Bemerkung 11.6. Aus der De Morganschen Regel folgt, dass beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

Beispiel 11.7.

(i) Man nennt $\mathcal{T} = \{\varnothing, M\}$ die *triviale* Topologie und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ die *diskrete* Topologie auf M.

(ii) Ist $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\varnothing \neq N \subseteq M$, so definiert $\{N \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf N, die man *Relativtopologie* nennt. Achtung: Offene Mengen in N bzgl. der Relativtopologie müssen nicht offen in M sein (zum Beispiel wenn N selbst nicht offen in M ist).

(iii) Der Durchschnitt von beliebig vielen Topologien auf M ist wieder eine Topologie. Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(M)$, so ist

$$\langle \mathcal{S} \rangle := \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ Topologie} \\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}}} \mathcal{T}$$

die „kleinste" Topologie, die $\mathcal{S}$ umfasst. Offenbar besteht $\langle \mathcal{S} \rangle$ aus beliebigen (auch leeren) Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Elementen aus $\mathcal{S}$. Ist $\mathcal{S}$ ein Filter, so gilt offenbar $\langle \mathcal{S} \rangle = \mathcal{S} \cup \{\varnothing\}$.

(iv) Ist $(M_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie disjunkter topologischer Räume, so ist auch $M := \bigcup_{i \in I} M_i$ mit

$$\mathcal{T} := \Big\{ \bigcup_{i \in I} T_i : T_i \in \mathcal{T}_i \Big\}$$

ein topologischer Raum.

(v) Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

- $d(x, y) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y$ (positiv definit).
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisch).
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Man nennt (M,d) einen *metrischen Raum*. Für $x \in M$ und $\epsilon > 0$ definiert man die *ϵ-Kugel* um x durch

$$B_\epsilon(x) := \{y \in M : d(x,y) < \epsilon\}.$$

Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen* bzgl. d, falls für alle $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$ existiert. Man zeigt leicht, dass diese offenen Mengen eine Topologie bilden. Topologische Räume, die durch eine Metrik entstehen nennt man *metrisierbar*. Die *diskrete* Metrik mit $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$ führt zur diskreten Topologie (wähle $\epsilon = \frac{1}{2}$). Nicht jeder metrische Raum ist metrisierbar. Betrachte zum Beispiel $M = \{x,y\}$ mit der trivialen Topologie. Gäbe es eine entsprechende Metrik d, so wäre $\{x\}$ stets offen (wähle $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2}$).

(vi) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto |v|$ heißt *Norm* auf V, falls für alle $v,w \in V$ gilt:

- $|v| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $v = 0$ (positiv definit).
- $|\lambda v| = |\lambda||v|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (homogen).
- $|v + w| \leq |v| + |w|$ (Dreiecksungleichung).

Man nennt $(V, |.|)$ einen *normierten Raum*. Man zeigt leicht, dass $d(v,w) := |v - w|$ eine Metrik auf V definiert. Bekanntlich definiert $|v| := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$ die *euklidische* Norm auf $\mathbb{R}^n$. In der Analysis zeigt man, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ zur gleichen Topologie führen. Dies ist für unendlich-dimensionale Räume falsch.

(vii) Die Menge der koendlichen Teilmengen zusammen mit der leeren Menge bildet die *koendliche* Topologie auf jeder unendlichen Menge. Sie hat die besondere Eigenschaft, dass der Durchschnitt von zwei nichtleeren offenen Mengen niemals leer ist.

Definition 11.8. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq M$ und $x \in M$. Man nennt A eine *Umgebung* von x, falls eine offene Menge U mit $x \in U \subseteq A$ existiert. Man nennt x einen

- *inneren Punkt* von A, falls A Umgebung von x ist.
- *Randpunkt* von A, falls weder A noch $M \setminus A$ Umgebungen von x sind.

Die Menge der inneren Punkte (bzw. Randpunkte) von A nennt man das *Innere* $\mathring{A}$ (bzw. den *Rand* ∂A) von A. Schließlich nennt man $\overline{A} := \mathring{A} \cup \partial A$ die *abgeschlossene Hülle* von A.

Lemma 11.9. *Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq M$. Dann gilt:*

(i) $\mathring{A}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen in A.

(ii) $\overline{A}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

Insbesondere ist $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

Beweis.

(i) Nach Definition liegt jedes $x \in \mathring{A}$ in einer offenen Menge $U \subseteq A$. Sei umgekehrt $U \subseteq A$ offen. Dann ist A eine Umgebung für alle $x \in U$. Dies zeigt $U \subseteq \mathring{A}$.

(ii) Offensichtlich liegt $\mathring{A}$ in jeder abgeschlossenen Menge, die A enthält. Sei $x \in \partial A$ und B eine abgeschlossene Menge, die A enthält. Wäre $x \in M \setminus B$, so wäre $M \setminus B$ eine Umgebung von x und x kein Randpunkt. Also ist $x \in B$ und $\overline{A}$ liegt im Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten. Sei umgekehrt $x \in M \setminus \overline{A}$. Dann ist $M \setminus A$ eine Umgebung von x, das heißt es gibt eine offene Menge $U \subseteq M \setminus A$ mit $x \in U$. Nun ist x nicht in der abgeschlossenen Menge $M \setminus U$, die A enthält. Dies zeigt die Behauptung. □

Folgerung 11.10. *Eine Teilmenge A eines topologischen Raums ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen), wenn $A = \mathring{A}$ (bzw. $A = \overline{A}$) gilt.*

Beispiel 11.11. Sei $A = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das halboffene Intervall im euklidischen Raum $\mathbb{R}$. Dann ist $\mathring{A} = (0, 1)$ das offene Intervall, $\partial A = \{0, 1\}$ und $\overline{A} = [0, 1]$. Randpunkt können also sowohl innerhalb als außerhalb von A liegen.

Definition 11.12. Eine Teilmenge K eines topologischen Raums M heißt *kompakt*, wenn für jede Familie offener Mengen $(U_i)_{i\in I}$ mit $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $K \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$ existiert (man sagt: jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung). Ist M selbst kompakt, so spricht man von einem *kompakten* topologischen Raum.

Bemerkung 11.13.

(i) Besitzt M nur endlich viele offene Mengen ist offenbar jede Teilmenge kompakt.

(ii) Jede endliche Teilmenge eines topologischen Raums ist kompakt. In der diskreten Topologie gilt auch die Umkehrung.

(iii) In der koendlichen Topologie auf $\mathbb{N}$ ist jede offene Menge kompakt.

(iv) Ist $K \subseteq M$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen, so ist auch A kompakt, denn ist $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung, so ist $K \subseteq M \setminus A \cup \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung.

Definition 11.14. Ein Filter $\mathcal{F}$ eines topologischen Raums $(M, \mathcal{T})$ *konvergiert* gegen $x \in M$, falls $\mathcal{F}(x) \cap \mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$ gilt.

Lemma 11.15. *Ein topologischer Raum M ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter von M gegen einen Punkt konvergiert.*

Beweis. Sei M kompakt. Angenommen ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ von M konvergiert gegen keinen Punkt. Für alle $x \in M$ existieren dann $U_x \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{F}$ mit $x \in U_x$. Da M kompakt ist, existiert eine endliche Menge $X \subseteq M$ mit $M = \bigcup_{x\in X} U_x$. Dies widerspricht Lemma 11.4.

Nehmen wir nun an, dass M nicht kompakt ist. Dann existiert eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ ohne endliche Teilüberdeckung. Folglich ist

$$\big\{A \subseteq M : \exists i_1, \ldots, i_n \in I : M \setminus A \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}\big\}$$

ein Filter, der in einem Ultrafilter $\mathcal{F}$ liegt. Angenommen $\mathcal{F}$ konvergiert gegen x. Sei $i \in I$ mit $x \in U_i$. Dann wäre $\varnothing = U_i \cap (M \setminus U_i) \in \mathcal{F}$. □

Definition 11.16. Sei $(M_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und $M := \bigtimes_{i \in I} M_i$. Seien $\pi_i \colon M \to M_i$, $(x_j)_j \mapsto x_i$ die Projektionsabbildungen für $i \in I$. Man nennt

$$\langle \pi_i^{-1}(U) : i \in I, U \in \mathcal{T}_i \rangle$$

die *Produkt-Topologie* auf M.

Satz 11.17 (Tychonoff). *Für jede Familie von topologischen Räumen $(M_i)_{i \in I}$ ist $M := \bigtimes_{i \in I} M_i$ genau dann kompakt, wenn alle M_i kompakt sind.*

Beweis. Sei M kompakt, $i \in I$ und $M_i = \bigcup_{j \in J} U_j$ eine offene Überdeckung. Dann ist $M = \bigcup_{j \in J} \pi_i^{-1}(U_j)$ eine offene Überdeckung von M. Da M kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J' \subseteq J$ mit $M = \bigcup_{j \in J'} \pi_i^{-1}(U_j)$. Daher ist $M_i = \bigcup_{j \in J'} U_j$ und M_i ist kompakt.

Seien nun alle M_i kompakt. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter von M. Für $i \in I$ sei

$$\mathcal{F}_i := \{\pi_i(F) : F \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{P}(M_i).$$

Wegen $\varnothing \notin \mathcal{F}$ ist $\varnothing \notin \mathcal{F}_i$. Sei $A \supseteq \pi_i(F) \in \mathcal{F}_i$. Dann ist $F \subseteq \pi_i^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ und $A = \pi_i(\pi_i^{-1}(A)) \in \mathcal{F}_i$. Für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ist $\pi_i(F_1) \cap \pi_i(F_2) \supseteq \pi_i(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{F}_i$ und $\pi_i(F_1) \cap \pi_i(F_2) \in \mathcal{F}_i$. Dies zeigt, dass $\mathcal{F}_i$ ein Filter von M_i ist. Sei auch $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}_i$ ein Filter von M_i. Für $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ gilt $\pi_i(F) \cap G \in \mathcal{F}_i$ und $F \cap \pi_i^{-1}(G) \neq \varnothing$. Auch der Durchschnitt zweier Mengen der Form $F \cap \pi_i^{-1}(G)$ ist nichtleer, denn $\pi_i^{-1}(G_1 \cap G_2) \subseteq \pi_i^{-1}(G_1) \cap \pi_i^{-1}(G_2)$ für $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Daher ist

$$\mathcal{F}' := \left\{A \subseteq M : \exists G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F} : \pi_i^{-1}(G) \cap F \subseteq A\right\}$$

ein Filter von M, der $\mathcal{F}$ enthält. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Für $G \in \mathcal{G}$ gilt somit $\pi_i^{-1}(G) = \pi_i^{-1}(G) \cap M \in \mathcal{F}$ und $G = \pi_i(\pi_i^{-1}(G)) \in \mathcal{F}_i$. Also ist $\mathcal{F}_i = \mathcal{G}$ ein Ultrafilter von M_i. Nach Lemma 11.15 konvergiert $\mathcal{F}_i$ gegen ein $x_i \in M_i$. Sei $x := (x_i)_{i \in I} \in M$. Sei $U \subseteq M$ eine offene Menge, die x enthält. Nach Lemma 11.15 genügt es $U \in \mathcal{F}$ zu zeigen. Nach Definition der Produkt-Topologie können wir annehmen, dass offenen Mengen $U_{i_j} \subseteq M_{i_j}$ für $j = 1, \ldots, n$ mit

$$U = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

existieren. Wegen $x_{i_j} \in U_{i_j}$ gilt $U_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$ für $j = 1, \ldots, n$. Also existieren $V_j \in \mathcal{F}$ mit $\pi_{i_j}(V_j) = U_{i_j}$. Aus $V_j \subseteq \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ folgt $\pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \in \mathcal{F}$ und schließlich $U \in \mathcal{F}$. □

Satz 11.18 (Kelley). *Der Satz von Tychonoff impliziert das Auswahlaxiom.*

Beweis. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Sei x ein „neues“ Element, welches in keinem der M_i liegt. Sei $\widehat{M_i} := M_i \cup \{x\}$ ausgestattet mit der koendlichen Topologie, wobei zusätzlich $\{x\}$ offen sein soll. Nach Bemerkung 11.13 und Tychonoff sind $\widehat{M_i}$ und $\widehat{M} := \bigtimes_{i \in I} \widehat{M_i}$ kompakt. Die i-te Projektion $\pi_i \colon \widehat{M} \to \widehat{M_i}$ ist stetig. Daher ist $\pi_i^{-1}(x)$ offen. Angenommen $\bigtimes_{i \in I} M_i = \varnothing$. Dann ist $\widehat{M} = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(x)$ eine offene Überdeckung. Sei $J \subseteq I$ endlich mit $\widehat{M} = \bigcup_{j \in J} \pi_j^{-1}(x)$. Offenbar existiert jedoch ein Element $m = (m_i)_{i \in I} \in \widehat{M}$ mit $m_j \in M_j$ für $j \in J$ und $m_i = x$ für $i \in I \setminus J$. Widerspruch. □

Definition 11.19. Ein topologischer Raum M heißt

- *zusammenhängend*, falls M nicht die Vereinigung von zwei disjunkten nichtleeren offenen Teilmengen ist.

- *Hausdorff-Raum*, falls für verschiedene $x, y \in M$ zwei disjunkte offene Mengen $U_x, U_y \subseteq M$ mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$ existieren (*Trennungsaxiom*).

Bemerkung 11.20. Offenbar ist ein topologischer Raum M genau dann zusammenhängend, wenn $\varnothing$ und M die einzigen Teilmengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Satz 11.21. *Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $x, y \in M$ verschiedene Punkte. Sei $\epsilon := \frac{d(x,y)}{2}$. Dann sind $B_\epsilon(x)$ und $B_\epsilon(y)$ disjunkte offene Mengen, die x bzw. y enthalten. $\square$

Beispiel 11.22.

(i) Wir zeigen, dass der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist. Angenommen es existieren disjunkte nichtleere offene Teilmengen U, V mit $\mathbb{R}^n = U \cup V$. Sei $x \in U$ und $y \in V$. Sei

$$r := \sup\{s \in [0,1] : x + s(y - x) \in U\}$$

und $z := x + r(y - x)$. Liegt z in U, so gilt $B_\epsilon(z) \subseteq U$ für ein $\epsilon > 0$. Dann wäre aber auch $z + \frac{\epsilon}{2|y-x|}(y - z) \in U$ im Widerspruch zur Definition von r. Analog erhält man einen Widerspruch im Fall $z \in V$.

(ii) Die triviale Topologie auf M liefert keinen Hausdorff-Raum, falls $|M| > 1$. Eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie ist ebenfalls kein Hausdorff-Raum, denn der Durchschnitt zweier nichtleerer offener Mengen ist nie leer.

Lemma 11.23. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raums ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei K kompakt im Hausdorff-Raum M. Sei $x \in M \setminus K$. Für alle $a \in K$ existieren disjunkte offene Mengen $U_a, V_a \subseteq M$ mit $a \in U_a$ und $x \in V_a$. Wegen der Kompaktheit existieren $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$. Nun ist $V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n}$ eine offene Menge in $M \setminus K$, die x enthält. Also ist $M \setminus K$ offen und K ist abgeschlossen. $\square$

Beispiel 11.24. Die triviale Topologie auf einer endlichen Menge zeigt, dass kompakte Mengen im Allgemeinen nicht abgeschlossen sein müssen.

Satz 11.25. *Sei M ein kompakter Hausdorff-Raum und $U, V \subseteq M$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann existieren disjunkte offenen Teilmengen $A, B \subseteq M$ mit $U \subseteq A$ und $V \subseteq B$.*

Beweis. Sei $u \in U$. Für jedes $v \in V$ existieren disjunkte offenen Mengen U_v, V_v mit $u \in U_v$ und $v \in V_v$. Die offene Überdeckung

$$M = (M \setminus V) \cup \bigcup_{v \in V} V_v$$

besitzt eine endliche Teilüberdeckung $M = (M \setminus V) \cup \bigcup_{i=1}^n V_{v_i}$. Die offenen Mengen $A_u := U_{v_1} \cap \ldots \cap U_{v_n}$ und $B_u := V_{v_1} \cup \ldots \cup V_{v_n}$ sind disjunkt und erfüllen $u \in A_u$ und $V \subseteq B_u$. Die offene Überdeckung

$$M = (M \setminus U) \cup \bigcup_{u \in U} A_u$$

besitzt ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung $M = (M \setminus U) \cup \bigcup_{i=1}^m A_{u_i}$. Nun erfüllen $A := A_{u_1} \cup \ldots \cup A_{u_m}$ und $B := B_{u_1} \cap \ldots \cap B_{u_m}$ die Behauptung. $\square$

Definition 11.26. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq M$ nennt man

$$d(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

den *Durchmesser* von A. Ist $d(A) < \infty$, so nennt man A *beschränkt.*

Lemma 11.27. *Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt bzgl. der euklidischen Metrik.*

Beweis. Sei $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Sei $S \subseteq [a, b]$ die Menge aller Punkte s, sodass $[a, s]$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wegen $a \in S$ ist $S \neq \varnothing$. Da $[a, b]$ beschränkt ist, existiert $s := \sup S$. Angenommen $s < b$. Sei $[a, s] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung und $1 \le i \le n$ mit $s \in U_i$. Da U_i offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(s) \subseteq U_i$. Nun gilt auch $[a, s + \epsilon/2] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ im Widerspruch zur Wahl von s. Also ist $s = b$ und $[a, b]$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. $\square$

Satz 11.28 (Heine-Borel)**.** *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt und abgeschlossen. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq M$ kompakt. Nach Satz 11.21 und Lemma 11.23 ist K abgeschlossen. Da die offene Überdeckung $K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(x)$ für ein $x \in M$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, ist K beschränkt.

Sei nun $M = \mathbb{R}^n$ und A beschränkt und abgeschlossen. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $A \subseteq [a, b]^n$. Sind $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}$, so auch $U_1 \times \ldots \times U_n \subseteq M$. Für jede offene Menge $U \subseteq M$ und $x \in U$ existieren umgekehrt offene Mengen $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in U_1 \times \ldots \times U_n \subseteq U$. Dies zeigt, dass die euklidische Metrik auf M genau die Produkt-Topologie der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Nach Lemma 11.27 $[a, b]$ ein kompakter Raum bezüglich der Relativtopologie. Nach Tychonoff ist auch $[a, b]^n$ kompakt. Nach Bemerkung 11.13 ist A kompakt. $\square$

Satz 11.29 (Lebesgue)**.** *Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $d(A) \le \delta$ in einem U_i liegt.*

Beweis. Für jedes $x \in M$ existiert ein $\epsilon_x > 0$, sodass $B_{2\epsilon_x}(x)$ in einem U_i liegt. Da M kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit $M = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$. Sei $\delta := \min\{\epsilon_{x_i} : i = 1, \ldots, n\}$. Sei $a \in A \cap B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$. Für alle $b \in A$ gilt

$$d(b, x_i) \le d(b, a) + d(a, x_i) < \delta + \epsilon_{x_i} \le 2\epsilon_{x_i}$$

und $A \subseteq B_{2\epsilon_{x_i}}(x_i)$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Definition 11.30. Seien $(A, \mathcal{A})$ und $(B, \mathcal{B})$ topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt *stetig*, falls $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ für alle $C \in \mathcal{B}$ gilt (Urbilder offener Mengen sind offen). Ist f bijektiv und f, f^{-1} stetig, so nennt man f einen *Homöomorphismus.* Ggf. nennt man A und B *homöomorph.*

Bemerkung 11.31.

(i) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, denn $A \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(B \setminus C)$.

(ii) Die Komposition von stetigen Abbildungen ist offensichtlich stetig.

(iii) Ist $f\colon A \to B$ stetig und $K \subseteq A$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt, denn ist $f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung, so ist auch $K \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ eine offene Überdeckung.

(iv) Die Produkt-Topologie auf $X := \bigtimes_{i\in I} X_i$ ist die gröbste Topologie, sodass die Projektionen $X \to X_i$, $(x_j)_j \mapsto x_i$ stetig sind.

Beispiel 11.32.

(i) Anders als in der (linearen) Algebra ist die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen Abbildung nicht automatisch stetig. Betrachte zum Beispiel $A = B = \mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie auf A und der trivialen Topologie auf B. Dann ist $f\colon A \to B$, $a \mapsto a$ stetig, aber f^{-1} nicht.

(ii) Die Abbildung $\mathbb{R} \to (0,1)$, $x \mapsto \frac{1}{1+2^x}$ ist ein Homöomorphismus bzgl. der euklidischen (Relativ)topologie. Ein beschränkter Raum kann also zu einem unbeschränkten Raum homöomorph sein.

Folgerung 11.33. *Sei A ein kompakter Raum und B ein Hausdorff-Raum. Dann ist jede stetige Bijektion $A \to B$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $f\colon A \to B$ eine stetige Bijektion und $U \subseteq A$ abgeschlossen. Nach Bemerkung 11.13 und Bemerkung 11.31 sind U und $f(U)$ kompakt. Nach Lemma 11.23 ist $f(U)$ abgeschlossen. Daher ist f^{-1} stetig. $\square$

12 Hyperreelle und surreale Zahlen

Bemerkung 12.1. In der Analysis definiert man reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen. Zwei Folgen aus $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ betrachtet man dabei als äquivalent, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Die gleiche Konstruktion auf $\mathbb{R}$ angewendet bringt nichts Neues, da $\mathbb{R}$ bereits vollständig ist (jede Cauchyfolge konvergiert). Wir definieren daher eine andere Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Definition 12.2. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, der alle koendlichen Mengen enthält (und daher nach Lemma 11.4 keine endliche Menge enthält). Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch

$$(a_0, a_1, \ldots) \sim (b_0, b_1, \ldots) \;:\Longleftrightarrow\; \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Für $a = (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei $[a]$ die Äquivalenzklasse von a. Man nennt ${}^*\mathbb{R} := \{[a] : a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ die Menge der *hyperreellen* Zahlen. Für $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
[a] + [b] &:= [(a_n + b_n)_n],\\
[a] \cdot [b] &:= [(a_n b_n)_n],\\
[a] < [b] &:\Longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 12.3.

(i) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $a \sim b \sim c$. Dann liegen $S := \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$ und $T := \{n \in \mathbb{N} : b_n = c_n\}$ in $\mathcal{F}$. Wegen $S \cap T \subseteq \{n \in \mathbb{N} : a_n = c_n\}$ gilt $a \sim c$. Daher ist $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Mit dem gleichen Argument zeigt man, dass $+$, $\cdot$ und $<$ auf ${}^*\mathbb{R}$ wohldefiniert sind. Außerdem gelten die üblichen Rechenregeln und (9.1). Wir definieren zusätzlich $-[a] := [(-a_n)_n]$ und

$$|[a]| := \begin{cases} [a] & \text{falls } [a] \ge 0,\\ -[a] & \text{sonst} \end{cases}$$

für $a \in {}^*\mathbb{R}$. Man zeigt leicht $|xy| = |x||y|$ und $|x + y| \le |x| + |y|$ für $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ (da $|.|$ nicht nach $\mathbb{R}$ abbildet, handelt es sich formal nicht um eine Norm).

(ii) Durch $r \mapsto [(r, r, \ldots)]$ kann man $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$ einbetten. Andererseits ist $x := [(0, 1, \ldots)] \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ mit $r < x$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Anlog ist $x := [(2^0, 2^{-1}, \ldots)] \in {}^*\mathbb{R}$ mit $0 < x < r$ für alle positiven $r \in \mathbb{R}$. Nach Satz 8.8 und Satz 9.10 ist $|\mathbb{R}| \le |{}^*\mathbb{R}| \le |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, d. h. $\mathbb{R}$ und ${}^*\mathbb{R}$ sind gleichmächtig.

(iii) Sicher ist $1 \in \mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ ein neutrales Element der Multiplikation. Sei $a \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$b_n := \begin{cases} a_n^{-1} & \text{falls } a_n \ne 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 11.4 gilt $\{n \in \mathbb{N} : a_n \ne 0\} \in \mathcal{F}$. Für $b = (b_n)_n$ ist daher $[a] \cdot [b] = 1$. Dies zeigt, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist.

(iv) Unter Annahme der Kontinuumshypothese kann man zeigen, dass ${}^*\mathbb{R}$ nicht wesentlich von der Wahl des Ultrafilters $\mathcal{F}$ abhängt. Ersetzt man in der Analysis die reellen Zahlen durch die hyperreellen Zahlen, so spricht man von *Nicht-Standard-Analysis*.

Definition 12.4. Eine hyperreelle Zahl x heißt *endlich*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x| < n$ existiert. Ggf. nennt man

$$\mathrm{st}(x) := \sup\{r \in \mathbb{R} : r \le x\} \in \mathbb{R}$$

Standardteil von x. Sei $\mathbb{E} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ die Menge der endlichen hyperreellen Zahlen.

Bemerkung 12.5.

(i) Genau dann ist $x \in {}^*\mathbb{R}$ endlich, wenn x auf einer Indexmenge in $\mathcal{F}$ beschränkt ist. Daraus folgt leicht, dass $\mathbb{E}$ unter Addition und Multiplikation (aber nicht Division) abgeschlossen ist.

(ii) Aus $x < n \in \mathbb{N}$ folgt, dass die Menge $\{r \in \mathbb{R} : r \le x\}$ beschränkt ist und daher ein Supremum besitzt.

Satz 12.6.

(i) Für $x \in \mathbb{E}$ ist $\mathrm{st}(x)$ die einzige reelle Zahl mit $|x - \mathrm{st}(x)| < r$ für alle positiven $r \in \mathbb{R}$, d. h. $\mathrm{st}(x)$ liegt „beliebig nah“ bei x. Insbesondere ist $\mathrm{st}(x) = x$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Für $x, y \in \mathbb{E}$ gilt

$$\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y), \qquad \mathrm{st}(xy) = \mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y), \qquad x \le y \implies \mathrm{st}(x) \le \mathrm{st}(y).$$

Beweis.

(i) Im Fall $r + \mathrm{st}(x) \le x$ wäre $\mathrm{st}(x)$ keine obere Schranke von $M := \{s \in \mathbb{R} : s \le x\}$. Also gilt $x - \mathrm{st}(x) < r$. Da $\mathrm{st}(x)$ die kleinste obere Schranke von M ist, existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{st}(x) - r < s < x$. Daraus folgt $\mathrm{st}(x) - x < r$. Insgesamt ist $|x - \mathrm{st}(x)| < r$ für alle positiven $r \in \mathbb{R}$. Angenommen $t \in \mathbb{R}$ erfüllt die gleiche Abschätzung. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung $|\,\mathrm{st}(x) - t| \le |\,\mathrm{st}(x) - x| + |x - t| < 2r$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Es folgt $t = \mathrm{st}(x)$.

(ii) Nach (i) gilt $|x + y - \mathrm{st}(x) - \mathrm{st}(y)| \le |x - \mathrm{st}(x)| + |y - \mathrm{st}(y)| \le r$ für alle positiven $r \in \mathbb{R}$. Aus der Eindeutigkeit in (i) folgt $\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$. Analog erhält man $\mathrm{st}(xy) = \mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y)$ aus

$$|xy - \mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y)| \le |x(y - \mathrm{st}(y)) + (x - \mathrm{st}(x))\,\mathrm{st}(y)| \le |x||y - \mathrm{st}(y)| + |x - \mathrm{st}(x)||\,\mathrm{st}(y)|.$$

Sei nun $x \le y$. Dann ist $\mathrm{st}(y)$ eine obere Schranke von $\{r \in \mathbb{R} : r \le x\}$. Dies zeigt $\mathrm{st}(x) \le \mathrm{st}(y)$. □

Bemerkung 12.7. Wir verallgemeinern die Konstruktion der Dedekind-Schnitte, um eine deutlich größere Klasse von Zahlen zu definieren.

Definition 12.8 (Conway)**.** Sei $\mathbb{S}_0 := \varnothing$. Rekursiv definieren wir für jede Kardinalzahl $\mathfrak{a} > 0$ die Menge $\mathbb{S}_\mathfrak{a}$ aller Paare der Form $\{L, R\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $L, R \subseteq \bigcup_{\mathfrak{b}<\mathfrak{a}} \mathbb{S}_\mathfrak{b}$.
- $\forall l \in L, r \in R : r \nleq l$.

Die Relation $\leq$ ist dabei ebenfalls rekursiv definiert durch

$$\{L, R\} \leq \{L', R'\} \;:\Longleftrightarrow\; \forall l \in L, r' \in R' : \{L', R'\} \nleq l,\; r' \nleq \{L, R\}.$$

Wir werden sehen, dass

$$\{L, R\} \sim \{L', R'\} \;:\Longleftrightarrow\; \{L, R\} \leq \{L', R'\} \leq \{L, R\}$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Die Äquivalenzklasse von $\{L, R\}$ sei $(L|R)$. Wir werden $\mathbb{S}_\mathfrak{a}$ oft mit der entsprechenden Menge von Äquivalenzklassen identifizieren und die Definition von $\leq$ auf Äquivalenzklassen übertragen. Man nennt dann $\mathbb{S} := \bigcup_\mathfrak{a} \mathbb{S}_\mathfrak{a}$ die Klasse der *surrealen* Zahlen.

Bemerkung 12.9. Im Folgenden beweisen wir Eigenschaften der surrealen Zahlen mittels transfiniter Induktion. Der Induktionsanfang ist in der Regel trivial, weil es für $\mathbb{S}_0 = \varnothing$ nichts zu zeigen gibt. Wir prüfen zunächst, dass $\leq$ reflexiv und transitiv ist. Sei $(L|R) \in \mathbb{S}$ gegeben mit $L \subseteq \mathbb{S}_\mathfrak{a}$ und $R \subseteq \mathbb{S}_\mathfrak{b}$. Sei $l \in L$ und $r \in R$. Durch Induktion nach $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ können wir $l \leq l$ und $r \leq r$ annehmen. Im Fall $(L|R) \leq l$ wäre $l \nleq l$ und im Fall $r \leq (L|R)$ wäre $r \nleq r$. Dies zeigt $(L|R) \leq (L|R)$, d. h. $\leq$ und $\sim$ sind reflexiv. Sei nun $(L|R) \leq (L'|R') \leq (L''|R'')$. Angenommen es existiert ein $l \in L$ mit $(L''|R'') \leq l$. Induktiv gilt dann $(L'|R') \leq l$ und $(L|R) \leq l$. Dies widerspricht $l \leq l$. Analog zeigt man $r'' \nleq (L|R)$ für alle $r'' \in R''$. Damit ist $(L|R) \leq (L''|R'')$ und $\leq$ ist transitiv. Nach Definition ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{S}$.

Lemma 12.10. *Sei $(L|R) \in \mathbb{S}$. Dann gilt $l < (L|R) < r$ für alle $l \in L$ und $r \in R$. Außerdem ist $\leq$ total.*

Beweis. Nach Definition von $(L|R)$ gilt $r \nleq l$. Sei $l = (L_l|R_l)$. Induktiv gilt $l' < l$ für alle $l' \in L_l$. Im Fall $(L|R) \leq l'$ wäre $(L|R) \leq l$ und $l \nleq l$. Also ist $(L|R) \nleq l'$ für alle $l' \in L$. Dies zeigt $l < (L|R)$. Sei nun $r = (L_r, R_r)$. Induktiv gilt $r < r'$ für alle $r' \in R_r$. Im Fall $r' \leq (L|R)$ wäre $r \leq (L|R)$ im Widerspruch zu $r \leq r$. Daher gilt $(L|R) < r$. Für die zweite Behauptung sei $(L'|R') \in \mathbb{S}$ mit $(L|R) \nleq (L'|R')$. Dann existiert ein $l \in L$ mit $(L'|R') \leq l$ oder ein $r' \in R'$ mit $r' \leq (L|R)$. In beiden Fällen folgt $(L'|R') \leq (L|R)$. Dies zeigt die Totalität von $\leq$. □

Bemerkung 12.11. Nach Lemma 12.10 gilt $(L|R) \in \mathbb{S}$ genau dann, wenn $l < r$ für alle $l \in L$ und $r \in R$. Außerdem gilt

$$(L|R) \leq (L'|R') \iff \forall l \in L, r' \in R' : l < (L'|R'),\; (L|R) < r'.$$

Dies werden wir ab jetzt benutzen.

Beispiel 12.12. Um Klammern zu sparen schreiben wir $(x, y, \ldots |a, b, \ldots) := (\{x, y, \ldots\}|\{a, b, \ldots\})$.

(i) Offenbar besteht $\mathbb{S}_1$ nur aus $0 := (\varnothing|\varnothing)$. Man macht sich klar, dass $1 := (0|\varnothing)$ und $-1 := (\varnothing|0)$ in $\mathbb{S}_2$ liegen, während $(0|0)$ wegen $0 \leq 0$ nicht zugelassen ist. Nach Lemma 12.10 gilt $-1 < 0 < 1$.

(ii) Genau dann gilt $(L|R) = 0$, falls $l < 0$ und $r > 0$ für alle $l \in L$ und $r \in R$.

(iii) Aus $0 < (-1, 0|\varnothing)$ folgt $(-1, 0|\varnothing) \leq 1 \leq (-1, 0|\varnothing)$, d. h. $(-1, 0|\varnothing) = 1$. Dies lässt sich verallgemeinern.

Lemma 12.13. *Besitzt L ein größtes Element, so gilt $(L|R) = (\max(L)|R)$. Besitzt R ein kleinstes Element, so gilt $(L|R) = (L|\min(R))$.*

Beweis. Für alle $l \in L$ gilt $l \leq \max L < (\max(L)|R)$ nach Lemma 12.10. Für alle $r \in R$ ist $(L|R) < r$. Dies zeigt $(L|R) \leq (\max(L)|R)$. Nach Lemma 12.10 ist außerdem $\max L < (L|R)$ und $(\max(L)|R) < r$. Es folgt $(\max(L)|R) = (L|R)$. Die zweite Aussage ist analog. □

Definition 12.14. Für $x := (L|R) \in \mathbb{S}$ und $y := (L'|R') \in \mathbb{S}$ definieren wir rekursiv:

$$\begin{aligned} x + y &:= \big((L + y) \cup (x + L') \mid (R + y) \cup (x + R')\big), \\ -x &:= (-R \mid -L), \end{aligned}$$

wobei $x + L = \{x + l : l \in L\}$.

Bemerkung 12.15. Es ist keineswegs trivial, dass die Addition mit $\sim$ verträglich ist und tatsächlich surreale Zahlen produziert. Im ersten Schritt können wir die Definition gedanklich zunächst nur auf die ursprünglichen Elemente $\{L, R\}$ anwenden und die Forderung $l < r$ für $l \in L$ und $r \in R$ ignorieren. Der nächste Schritt zur Wohldefiniertheit ist das folgende Lemma.

Lemma 12.16. *Für alle $x, y, z \in \mathbb{S}$ gilt*

$$x \leq y \iff x + z \leq y + z.$$

Beweis. Sei $x = (L|R) \in \mathbb{S}_{\mathfrak{a}}$, $y = (L'|R') \in \mathbb{S}_{\mathfrak{b}}$ und $z = (L''|R'') \in \mathbb{S}_{\mathfrak{c}}$. Wie üblich seien $l, r, l', \ldots$ Elemente aus $L, R, L', \ldots$. Wir wählen Kardinalzahlen $\bar{\mathfrak{a}} \leq \bar{\mathfrak{b}} \leq \bar{\mathfrak{c}}$ mit $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\} = \{\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{c}}\}$. Sei $x+z \leq y+z$, aber $x > y$. Dann existiert ein l mit $l \geq y$ oder ein r' mit $r' \leq x$. Durch Induktion nach $(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{c}})$ folgt $l + z \geq y + z$ oder $r' + z \leq x + z$ (der Induktionsanfang folgt aus der einfachen Gleichung $0 + 0 = 0$). Beides widerspricht $x + z \leq y + z$. Daher gilt $x \leq y$.

Sei nun $x \leq y$, aber $x + z > y + z$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

$$l + z \geq y + z, \qquad x + l'' \geq y + z, \qquad x + z \geq r' + z, \qquad x + z \geq y + r''.$$

Induktiv gilt $y + l'' \geq x + l''$ und $y + r'' \geq x + r''$. Nach dem ersten Teil des Beweises folgt eine der Aussagen:

$$l \geq y, \qquad l'' \geq z, \qquad x \geq r', \qquad z \geq r''.$$

Alle Aussagen widersprechen $x \leq y$ oder Lemma 12.10. □

Bemerkung 12.17. Aus Lemma 12.16 folgt

$$\begin{aligned} x < y &\iff x + z < y + z, \\ x \leq x',\ y \leq y' &\implies x + y \leq x' + y'. \end{aligned}$$

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt $l+y<r+y$, $l+y<x+r'$, $x+l'<r+y$ und $x+l'<x+r'$. Dies zeigt $x+y\in\mathbb{S}$. Ist $x=x'$ und $y=y'$, so ergibt sich $x+y=x'+y'$, d. h. die Addition ist wohldefiniert. Ähnlich zeigt man

$$x\le y \iff -y\le -x.$$

Aus $l<r$ folgt insbesondere $-r<-l$. Also ist auch $-x\in\mathbb{S}$.

Lemma 12.18. *Für alle $x,y,z\in\mathbb{S}$ gilt:*

(i) $x+y=y+x$ *und* $(x+y)+z=x+(y+z)$.

(ii) $x+0=x$ *und* $x+(-x)=0$.

Beweis. Wie üblich sei $x=(L|R)$, $y=(L'|R')$ und $z=(L''|R'')$.

(i) Die Gleichung $x+y=y+x$ ist trivial. Es gilt

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= (L+y\cup x+L' \mid R+y, x+R')+z\\ &= \big((L+y)+z\cup(x+L')+z\cup(x+y)+L'' \mid\\ &\qquad (R+y)+z\cup(x+R')+z\cup(x+y)+R''\big)\\ &= \big(L+(y+z)\cup x+(L'+z)\cup x+(y+L'') \mid\\ &\qquad R+(y+z)\cup x+(R'+z)\cup x+(y+R'')\big)\\ &= x+(L'+z\cup y+L'' \mid R'+z\cup y+R'')\\ &= x+(y+z)\end{aligned}$$

(ii) Offenbar gilt $0+0=(\varnothing|\varnothing)=0$. Induktiv folgt $x+0=(L+0\mid R+0)=(L,R)=x$. Außerdem ist $x+(-x)=(L+(-x)\cup x+(-R)\mid R+(-x)\cup x+(-L))$. Aus Lemma 12.16 folgt induktiv $l+(-x)<l+(-l)=0$ und $x+(-r)<r+(-r)=0$. Dies zeigt $x+(-x)\le 0$. Analog ist $0=r+(-r)<r+(-x)$ und $0=l+(-l)<x+(-l)$. Damit ist $0\le x+(-x)$ bewiesen. □

Bemerkung 12.19. Lemma 12.18 zeigt, dass die surrealen Zahlen bzgl. Addition eine abelsche Gruppe bilden. Wir können nun wie gewohnt $x-y$ anstelle von $x+(-y)$ schreiben.

Beispiel 12.20.

(i) Wir haben bereits $1=(0|\varnothing)$ definiert. Für $n\in\mathbb{N}_+$ setzen wir induktiv $n:=(n-1|\varnothing)$. Dann gilt

$$n+m=(n-1\mid\varnothing)+(m-1\mid\varnothing)=(n-1+m,\ n+m-1\mid\varnothing)=(n+m-1\mid\varnothing).$$

Auf diese Weise kann man alle ganzen Zahlen als surreale Zahlen auffassen. Allgemeiner kann man jede Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ mit $(\{\mathfrak{b}:\mathfrak{b}<\mathfrak{a}\}\mid\varnothing)$ identifizieren.

(ii) Sei $x:=(0|1)\in\mathbb{S}$. Nach Lemma 12.10 gilt $0<x<1$ und $x+x=(x|x+1)$. Es folgt $x+x\le 1\le x+x$. Man kann also $\frac{1}{2}:=(0|1)$ definieren. Analog zeigt man $\frac{1}{4}=(0|\frac{1}{2})$ usw. Auf diese Weise lassen sich alle rationalen Zahlen der Form $\frac{a}{2^n}$ mit $a\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ als surreale Zahlen realisieren. Für jede weitere reelle Zahl $r\in\mathbb{R}$ existieren $a_n\in\mathbb{Z}$ mit $a_n2^{-n}<r<(a_n+1)2^{-n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es folgt

$$r=\big(\{a_n2^{-n}:n\in\mathbb{N}\}\mid\{(a_n+1)2^{-n}:n\in\mathbb{N}\}\big)\in\mathbb{S}.$$

Definition 12.21. Für surreale Zahlen $x = (L|R)$ und $y = (L'|R')$ definieren wir

$$x \cdot y := xy := (ly + xl' - ll',\ ry + xr' - rr' \mid ly + xr' - lr',\ ry + xl' - rl' : l, l', r, r'),$$

wobei jeder Terme wie $ly + xl' - ll'$ zu einem Tupel von Parametern wie $(l, l') \in L \times L'$ gehört.

Lemma 12.22. *Für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{S}$ gilt:*

(i) $xy \in \mathbb{S}$.

(ii) Aus $x = y$ folgt $xz = yz$.

(iii) Aus $x_1 \le x_2$ und $y_1 \le y_2$ folgt $x_1y_2 + x_2y_1 \le x_1y_1 + x_2y_2$. Die Ungleichung ist strikt, falls $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$.

(iv) $x, y > 0 \implies xy > 0$.

Beweis. Wir beweisen die ersten drei Aussagen simultan durch Induktion.

(i) Die Bestandteile von xy sind induktiv surreale Zahlen. Wir müssen

$$\begin{aligned} l_1y + xl' - l_1l' &< l_2y + xr' - l_2r', & ly + xl_1' - ll_1' &< ry + xl_2' - rl_2', \\ ry + xr_1' - rr_1' &< ly + xr_2' - lr_2', & r_1y + xr' - r_1r' &< r_1y + xl' - r_1l' \end{aligned}$$

zeigen. Nehmen wir $l_1 \le l_2$ an. Dann folgt $l_1y + l_2l' \le l_1l' + l_2y$ und $l_2r' + xl' < l_2l' + xr'$ aus (iii). Insgesamt ist

$$l_1y + xl' - l_1l' \le l_2y + xl' - l_2l' < l_2y + xr' - l_2r'.$$

Gilt hingegen $l_2 \le l_1$, so hat man $l_1r' + xl' < l_1l' + xr'$, $l_2r' + l_1y \le l_2y + l_1r'$ und

$$l_1y + xl' - l_1l' < l_1y + xr' - l_1r' \le l_2y + xr' - l_2r'.$$

Damit ist die erste der vier Ungleichungen bewiesen. Die anderen drei sparen wir uns.

(ii) Induktiv gilt bereits $xl'' = yl''$ und $xr'' = yr''$. Mit (iii) folgt $lz + xl'' - ll'' < yz$ und $rz + xr'' - rr'' < yz$. Analog zeigt man $xz < l'z + yr'' - l'r''$ und $xz < r'z + yl'' - r'l''$. Also gilt $xz \le yz$. Aus Symmetriegründen folgt $yz \le xz$.

(iii) Nach (ii) können wir $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$ annehmen (man beachte, dass wir im Beweis von (ii) nur die strikte Ungleichung für (iii) benutzt haben). Wir bezeichnen die zu beweisende Ungleichung mit $U(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Wir benutzen Induktion nach $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, wobei $y_1 \in \mathbb{S}_{\mathfrak{a}}$, $y_2 \in \mathbb{S}_{\mathfrak{b}}$, $x_1 \in \mathbb{S}_{\mathfrak{c}}$, $x_2 \in \mathbb{S}_{\mathfrak{d}}$. Wäre $l_2 < x_1$ und $x_2 < r_1$ für alle l_2 und r_1, so hätten wir $x_2 < x_1$. Also gilt $x_1 < r_1 \le x_2$ für ein l_2 oder $x_1 \le l_2 < x_2$ für ein r_1. Nehmen wir den ersten Fall an (der zweite Fall ist analog). Induktiv gilt $U(r_1, x_2, y_1, y_2)$. Es genügt $U(x_1, r_1, y_1, y_2)$ mit strikter Ungleichung zu zeigen, denn dann wäre

$$\begin{aligned} (x_1y_2 + r_1y_1) + x_2y_1 < x_1y_1 + (r_1y_2 + x_2y_1) &\le x_1y_1 + r_1y_1 + x_2y_2, \\ x_1y_2 + x_2y_1 &< x_1y_1 + x_2y_2 \end{aligned}$$

nach Bemerkung 12.17. Wir können nun analog $y_1 < r_1' \le y_2$ annehmen. Dann gilt $U(x_1, r_1, r_1', y_2)$ und es verbleibt $U(x_1, r_1, y_1, r_1') = U(x, r, y, r')$ mit strikter Ungleichung zu beweisen. Das bedeutet $ry + xr' - rr' < xy$ und gilt nach (i) (im Beweis von (i) haben wir (iii) nur für eine niedrigere Induktionsstufe benutzt).

(iv) Folgt aus (iii) mit $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, x, 0, y)$. $\square$

Lemma 12.23. *Für alle $x, y, z \in \mathbb{S}$ gilt:*

(i) $xy = yx$ *und* $(x+y)z = xz + yz$.

(ii) $(xy)z = x(yz)$.

(iii) $1x = x$.

Beweis.

(i) Vertauscht man x und y, so bleiben die Terme auf der linken Hälfte von xy invariant, während die Terme auf der rechten Hälfte vertauscht werden. Dies zeigt $xy = yx$. Sei $x + y = (S|T)$ und $s \in S$ sowie $t \in T$. Der erste Term der linken Hälfte von $(x+y)z$ besteht aus Elementen der Form

$$\begin{aligned}\{sz + (x+y)l'' - sl''\} &= \{(l+y)z + (x+y)l'' - (l+y)l'',\ (x+l')z + (x+y)l'' - (x+l')l''\} \\ &= \{(lz + xl'' - ll'') + yz,\ xz + (l'z + yl'' - l'l'')\}.\end{aligned}$$

Dies sind Bestandteile der linken Hälfte von $xz + yz$. Die anderen Terme behandelt man analog.

(ii) Die linke Hälfte von $(xy)z$ besteht nach (i) und Induktion aus Elementen der Form

$$\begin{aligned}(ly + xl' - ll')z + (xy)l'' - (ly + xl' - ll')l'' &= l(yz) + x(l'z + yl'' - l'l'') - l(l'z + yl'' - l'l''), \\ (ry + xr' - rr')z + (xy)l'' - (ry + xr' - rr')l'' &= r(yz) + x(r'z + yl'' - r'l'') - r(r'z + yl'' - r'l''), \\ (ly + xr' - lr')z + (xy)r'' - (ly + xr' - lr')r'' &= l(yz) + x(r'z + yr'' - r'r'') - l(r'z + yr'' - r'r''), \\ (ry + xl' - rl')z + (xy)r'' - (ry + xl' - rl')r'' &= r(yz) + x(l'z + yr'' - l'r') - r(l'z + yr'' - l'r').\end{aligned}$$

Das stimmt mit der linken Hälfte von $x(yz)$ überein. Analog behandelt man die jeweils rechten Hälften.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}x \cdot 0 &= x \cdot (\varnothing|\varnothing) = (\varnothing|\varnothing) = 0, \\ x \cdot 1 &= x \cdot (0|\varnothing) = (l1 + x0 - l0 \mid r1 + x0 - r0) = (L|R) = x.\end{aligned}$$

□

Beispiel 12.24. Für $n, m \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$nm = \big((n-1)m + n(m-1) - (n-1)(m-1) \mid \varnothing\big) = (nm - 1 \mid \varnothing)$$

wie zu erwarten. Außerdem ist

$$2 \cdot \frac{1}{2} = (1|\varnothing) \cdot (0|1) = \Big(\frac{1}{2} + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \,\Big|\, \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1\Big) = \Big(\frac{1}{2} \,\Big|\, \frac{3}{2}\Big) = 1.$$

Bemerkung 12.25.

(i) Die Definition von xy lässt sich durch folgende Ungleichungen motivieren:

$$(x-l)(y-l') > 0, \qquad (r-x)(r'-y) > 0, \qquad (x-l)(r'-y) > 0, \qquad (r-x)(y-l') > 0.$$

(ii) Aus Lemma 12.23 folgt, dass $(\mathbb{S}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist (sofern man darauf verzichtet, dass Ringe Mengen sein müssen). Man kann weiter zeigen, dass $\mathbb{S}$ sogar ein (angeordneter) Körper ist, d. h. jedes $x \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$ besitzt ein multiplikatives Inverses. Die rekursive Definition von x^{-1} ist jedoch aufwendig, wie man bereits an

$$\frac{1}{3} = (2|\varnothing)^{-1} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \,\Big|\, \frac{1}{4^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} : n \in \mathbb{N}\Big)$$

sieht. Wir haben bereits nachgerechnet, dass Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen mit den entsprechenden Operationen in $\mathbb{S}$ übereinstimmen. Daraus folgt leicht, dass $\mathbb{Q}$ ein Teilkörper von $\mathbb{S}$ ist. Dies lässt sich auf $\mathbb{R}$ erweitern. Sei dazu $r = (a_n|b_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ wie in Beispiel 12.20. Für $m \in \mathbb{N}_+$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} mr &= \big((m-1)r + ma_n - (m-1)a_n \mid (m-1)r + mb_n - (m-1)b_n\big) \\ &= \big((m-1)r + a_n \mid (m-1)r + b_n\big), \end{aligned}$$

wobei beide Seiten im Reellen gegen mr konvergieren. Sei nun $s = (a'_n|b'_n)$ mit $a'_n, b'_n \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$rs = (a_n s + ra'_m - a_n a'_m,\ b_n s + rb'_m - b_n b'_m \mid a_n s + rb'_m - a_n b'_m,\ b_n s + ra'_m - b_n a'_m),$$

wobei wieder beide Seiten gegen rs konvergieren. Somit ist auch $\mathbb{R}$ ein Teilkörper von $\mathbb{S}$ mit der gleichen Ordnungsrelation. Man kann allgemeiner zeigen, dass jeder angeordnete Körper ein Teilkörper von $\mathbb{S}$ ist.

(iii) Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ stimmt die Arithmetik beliebiger Kardinalzahlen nicht mit den Operationen in $\mathbb{S}$ überein. Nach Satz 8.8 gilt beispielsweise $\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Dies bedeutet umgekehrt, dass man surreale Zahlen mit überraschenden Eigenschaften konstruieren kann. Sei dafür $\mathfrak{a} = (\mathbb{N}|\varnothing) \cong \mathbb{N}$. Dann erhält man mit $x := (\mathbb{N}|\mathfrak{a})$ eine surreale Zahl, die größer als jeder reelle Zahl aber kleiner als $\mathfrak{a}$ ist. Genauer gilt

$$x + 1 = (\mathbb{N} + 1, x \mid \mathfrak{a} + 1) = (x \mid \mathfrak{a} + 1) = \mathfrak{a},$$

wie man leicht nachrechnet. Sei nun $y := (\mathbb{N} \mid \mathfrak{a} - n : n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$y + y = (\mathbb{N} + y \mid \mathfrak{a} - \mathbb{N} + y) = \mathfrak{a},$$

denn $n + y < \mathfrak{a}$, $n < n + y$ und $\mathfrak{a} < \mathfrak{a} - n + y$. Man kann also $y = \frac{\mathfrak{a}}{2}$ definieren. Sei schließlich $z := (\mathbb{N} \mid 2^{-n}\mathfrak{a} : n \in \mathbb{N})$. Aus Lemma 12.10 folgt $nz < \mathfrak{a}$ und $(2^{-n} + 2^{-m})z < 2^{-n-m}\mathfrak{a}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich

$$z^2 = \big(nz + zm - nm,\ 2^{-n}\mathfrak{a}z + 2^{-m}\mathfrak{a}z - 2^{-n-m}\mathfrak{a}^2 \mid nz + z2^{-m}\mathfrak{a} - n2^{-m}\mathfrak{a}\big) \le \mathfrak{a}.$$

Umkehrt ist $\mathfrak{a} \le z^2$, denn $n < z^2$ und $\mathfrak{a} < nz + z2^{-m}\mathfrak{a} - n2^{-m}\mathfrak{a}$. Dies zeigt $y^2 = \mathfrak{a}$ und $y = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Man kann allgemeiner zeigen, dass jede positive surreale Zahl für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine n-te Wurzel besitzt. Analog zur Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$, erhält man durch Adjunktion einer Quadratwurzel von -1 zu $\mathbb{S}$ einen algebraisch abgeschlossenen Körper.