2-Blöcke mit metazyklischen und minimal nichtabelschen Defektgruppen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Benjamin Sambale
geboren am 10. 04. 1985 in Leipzig

Gutachter:

1. Prof. Dr. Burkhard Külshammer, Jena

2. Prof. Dr. Markus Linckelmann, Aberdeen

3. PD Dr. Jürgen Müller, Köln

Tag der Abgabe: 21. 06. 2010

Tag der öffentlichen Verteidigung: 26. 11. 2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der berühmte Satz von Feit und Thompson aus dem Jahr 1963, dass Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind, liefert ein Paradebeispiel, welches zeigt, dass die Darstellungstheorie zum Studium endlicher Gruppen seit Langem unentbehrlich ist. Die Grundidee ist dabei anstatt der Gruppe G, die Algebra KG für einen Körper K zusammen mit ihren Moduln zu betrachten. Durch Variation von K, insbesondere seiner Charakteristik, kann man oftmals tiefliegende Aussagen über G gewinnen. Um die Untersuchung zu vereinfachen, zerlegt man KG in eine direkte Summe von möglichst kleinen Idealen, die Blöcke genannt werden. Diese Summanden sind dann selbst wieder Algebren, und man kann jedem unzerlegbaren Modul von KG auf natürliche Weise genau einem Block zuordnen. Die Differenzierung der Blöcke erfolgt durch Invarianten, deren wichtigste die sogenannte Defektgruppe ist. Hat der Körper K Primzahlcharakteristik p, so ist die Defektgruppe eine bis auf Konjugation eindeutig bestimmte p-Untergruppe von G. Viele Eigenschaften eines Blocks spiegeln sich unmittelbar an seiner Defektgruppe wider, und Brauer hat in [14] sogar gezeigt, dass es bei fester Defektgruppe nur endlich viele wesentlich verschiedene Möglichkeiten für die entsprechenden Blöcke gibt.

Eine wichtige Aufgabe in der Darstellungstheorie ist daher die Bestimmung aller Blöcke mit einer vorgegebenen Defektgruppe. Im einfachsten Fall, wenn die Defektgruppe trivial ist, muss der entsprechende Block eine einfache Algebra sein. Nach einem Satz von Wedderburn ist diese einfache Algebra zu einem vollen Matrixring über einem Erweiterungskörper von K isomorph; insbesondere kennt man somit die Algebrastruktur des Blocks. Ist die Defektgruppe eines Blocks B zyklisch, so hat B endlichen Darstellungstyp, das heißt, B besitzt bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Moduln. Dadurch ist es Dade 1966 gelungen, die Algebrastruktur von B mit Hilfe sogenannter Brauer-Bäume zu beschreiben (siehe [27]). Für nichtzyklische Defektgruppen ist die Situation schwieriger, denn die entsprechenden Blöcke haben dann stets unendlichen Darstellungstyp. Man versucht in diesen Fällen zunächst numerische Invarianten der Blöcke zu bestimmen. Zu diesen gehören unter anderem der Trägheitsindex, die Anzahl der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere, die Anzahl der irreduziblen Brauer-Charaktere sowie die Cartan- und Zerlegungsmatrix. Den gewöhnlichen Charakteren kann man durch Betrachtung der p-Anteile der Grade eine Höhe zuordnen. Schließlich werden die Charaktere gleicher Höhe in Familien p-konjugierter Charaktere aufgeteilt. Diese Familien sind dabei gerade die Bahnen unter der Operation einer Galoisgruppe eines geeigneten Kreisteilungskörpers.

Speziell für $p = 2$ konnte man diese Invarianten für einige (wenige) Defektgruppen berechnen. So haben 1974/5 Brauer und Olsson in [19] bzw. [76] Diedergruppen, Quaternionengruppen und Semidiedergruppen als Defektgruppen betrachtet. Dies sind genau die Fälle, in denen die Blöcke zahmen Darstellungstyp haben. Daher ist es Erdmann in den achtziger Jahren auch gelungen, die Algebrastruktur dieser Blöcke unter Verwendung von Auslander-Reiten-Köchern zu beschreiben (siehe [31]). Eine weitere Arbeit zu dieser Problematik stammt von Külshammer. Er hat 1980 in [59] Defektgruppen, die Kranzprodukte einer zyklischen Gruppe mit einer Gruppe der Ordnung 2 sind, untersucht, wobei jedoch nicht in allen Fällen die Invarianten bestimmt werden konnten. Unter Zuhilfenahme der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen haben Kessar, Koshitani und Linckelmann die Blockinvarianten für die elementarabelsche Defektgruppe der Ordnung 8 berechnet (siehe [51]).

Für ungerade Primzahlen p ist die Situation ungleich schwieriger, sodass man hier nur über wenige Resultate verfügt. Selbst im kleinsten interessanten Fall einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 9 konnte Kiyota 1984 nicht für alle möglichen Trägheitsgruppen die Invarianten bestimmen (siehe [55]). Für die gleiche Defektgruppe haben Koshitani und Kunugi sowie Koshitani und Miyachi später die Vermutungen von Broué und Donovan zumindest für Hauptblöcke nachgewiesen (siehe [56, 57]). Allgemeiner haben Kessar und Linckelmann kürzlich in [53] unter starken Voraussetzungen gezeigt, dass ein Block mit elementarabelscher Defektgruppe der Ordnung p^2 viele Eigenschaften mit seinem Brauer-Korrespondenten teilt. Weitere aktuelle Ergebnisse stammen von Hendren und Alghamdi, die in [41, 40] bzw. [1, 2] extraspezielle Gruppen der Ordnung p^3 untersucht haben. Schließlich berechneten Holloway, Koshitani und Kunugi im Jahr 2010 die Invarianten für nichtabelsche Defektgruppen mit einer zyklischen Untergruppe vom Index p zumindest unter zusätzlichen Voraussetzungen (siehe [42]). Speziell für abelsche Defektgruppen gibt es auch einige Ergebnisse von Watanabe (siehe [103, 101, 102]).

All diese Ergebnisse suggerieren, dass gewisse Zusammenhänge zwischen Block und Defektgruppe stets gelten sollten. Diese führten im Laufe der Jahre zu einer großen Anzahl an bis heute unbewiesenen Vermutungen. Beispielsweise besagt Brauers $k(B)$-Vermutung, dass die Anzahl der irreduziblen Charaktere eines Blocks durch die Ordnung der Defektgruppe nach oben abgeschätzt werden kann. Als Spezialfall dieser Vermutung erhält man das mittlerweile gelöste $k(GV)$-Problem (siehe [91]). Andere Vermutungen, etwa Alperins Gewichts-Vermutung, sagen ein Lokal-Global-Prinzip voraus. Dies bedeutet, dass man „globale“ Eigenschaften eines Blocks von G aus „lokalen“ Informationen von Blöcken in (oftmals kleineren) Normalisatoren nichttrivialer p-Untergruppen ableiten kann. Weitere Vermutungen in der Blocktheorie sind die Olsson-Vermutung, Brauers Höhe-Null-Vermutung, die Alperin-McKay-Vermutung und die Dade-Vermutung (siehe Kapitel 2 für Details). Die äußerst zahlreichen verfeinerten Vermutungen unter anderem von Broué, Dade, Donovan, Eaton, Holm, Isaacs, Knörr, Navarro, Robinson, Turull und Willems werden in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht berücksichtigt.

Das Ziel dieser Dissertation ist, die Ergebnisse über Blöcke im Fall $p = 2$ um zwei neue Familien von Defektgruppen zu erweitern. Da man für Diedergruppen, Quaternionengruppen und Semidiedergruppen bereits alle Invarianten kennt, betrachten wir im Kapitel 3 allgemeiner metazyklische 2-Gruppen. Dabei heißt eine Gruppe metazyklisch, wenn sie einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe besitzt. Im ersten Schritt beschränken wir uns hierbei zusätzlich auf abelsche Defektgruppen. Die entsprechenden Blöcke haben dann in den allermeisten Fällen eine besonders einfache Struktur; es entstehen nämlich fast ausschließlich nilpotente Blöcke. Durch die grundlegende Arbeit [82] von Puig weiß man bereits seit 1988, dass nilpotente Blöcke zu einer vollen Matrixalgebra über der Gruppenalgebra der Defektgruppe isomorph sind. In diesen Fällen kann man die oben angegebenen Invarianten also schnell ableiten.

Aus der allgemeinen Theorie folgt leicht, dass man außer diesen nilpotenten Blöcken im abelschen Fall nur noch eine Familie von Defektgruppen betrachten muss. Diese Familie besteht aus den direkten Produkten zweier isomorpher zyklischer Gruppen. Hierfür gibt es bereits Arbeiten von Usami und Puig, in denen mit Hilfe von sogenannten perfekten Isometrien Ergebnisse über die entsprechenden Blöcke zumindest propagiert werden (siehe [94, 95, 84]). Allerdings findet sich in der Literatur für diese Behauptungen kein Beweis.

Daher führen wir einen solchen Beweis, und bestätigen somit die Aussagen von Usami und Puig. Die perfekte Isometrie verbindet dann den Block mit einem semidirekten Produkt der Defektgruppe und einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3. Somit lassen sich auch hier alle Invarianten ausrechnen.

Anschließend untersuchen wir mit der relativ neuen Theorie der Fusionssysteme den allgemeinen Fall einer metazyklischen Defektgruppe (für $p = 2$). Überraschenderweise stellt sich dabei heraus, dass außer in den oben genannten Fällen nur nilpotente Blöcke auftreten. Der Beweis hierfür ist unabhängig von der Arbeit [89] von Robinson, die das gleiche Resultat nur für Blöcke anstelle der allgemeineren Fusionssysteme enthält. Insgesamt kann man damit die Bestimmung der Blöcke mit metazyklischen Defektgruppen im Fall $p = 2$ als abgeschlossen ansehen. Für die genaue Formulierung der Ergebnisse verweisen wir auf Abschnitt 3.3, in dem sich eine Zusammenfassung befindet.

Die nächste Herausforderung besteht nun darin, die metazyklischen 2-Gruppen durch eine größere Klasse von 2-Gruppen zu ersetzen, und Resultate über entsprechende Blöcke mit derartigen Defektgruppen zu beweisen. In dieser Hinsicht ist die Arbeit [77] von Olsson, die unter anderem Blöcke mit minimal nichtabelschen Defektgruppen zum Inhalt hat, interessant. Eine Gruppe heißt dabei minimal nichtabelsch, wenn alle ihre echten Untergruppen abelsch sind. Durch Rédeis Klassifikation erkennt man, dass die meisten minimal nichtabelschen 2-Gruppen metazyklisch sind (siehe [90]). In den verbleibenden Fällen zeigt eine Analyse der entsprechenden Fusionssysteme, dass nur noch zwei Familien solcher 2-Gruppen interessante Defektgruppen liefern. In allen anderen Fällen entstehen wieder nilpotente Blöcke.

Die erste dieser Familien besteht aus den Gruppen

$$D = \langle x, y \mid x^{2^r} = y^{2^r} = [x, y]^2 = [x, x, y] = [y, x, y] = 1 \rangle$$

für $r \geq 2$. Als Besonderheit zeigt sich, dass jedes Fusionssystem auf D von D kontrolliert wird. Damit können wir Brauers $k(B)$-Vermutung und die Olsson-Vermutung für jeden Block B mit Defektgruppe D verifizieren. Im Fall $\mathrm{O}_2(G) \neq 1$ ist B im Wesentlichen eine Erweiterung eines nilpotenten Brauer-Korrespondenten in $\mathrm{C}_G(\mathrm{O}_2(G))$. In der wichtigen Arbeit [62] von Külshammer und Puig wurde in dieser Situation die Quellenalgebra von B bestimmt. Damit kann man leicht Alperins Gewichts-Vermutung bestätigen, und die Anzahl der irreduziblen (Brauer-)Charaktere durch Betrachtung des Brauer-Korrespondenten mit normaler Defektgruppe ausrechnen. Ohne diese Voraussetzung gelingt es uns allerdings nicht, die Untersuchung aller Eigenschaften abzuschließen. Jedoch liefert hier eine Beschränkung auf Spezialfälle befriedigende Ergebnisse. So zeigen wir mit Hilfe von Glaubermans Z^*-Satz, dass für Blöcke mit maximalem Defekt, das heißt, D ist eine 2-Sylowgruppe von G, die Gruppe G auflösbar sein muss. Dies schließt die Möglichkeit ein, dass B der Hauptblock von G ist. Durch eine ganze Reihe von Arbeiten, beginnend mit dem Artikel [33] von Fong aus dem Jahr 1960, kennt man die Darstellungstheorie für auflösbare Gruppen sehr gut. Daher ist die Berechnung der Invarianten hier ohne Schwierigkeiten möglich. Im zweiten Spezialfall schauen wir uns eine entsprechende Defektgruppe der Ordnung 32 (das heißt $r = 2$) an. Hier führt eine aufwendige Analyse der möglichen Zerlegungsmatrizen schließlich zum Ziel. Diese Ergebnisse suggerieren zusammen mit bekannten Resultaten über die relativ ähnlichen Quaternionengruppen, dass der Block B Morita-äquivalent zu einem Brauer-Korrespondenten in $\mathrm{C}_G(D')$ sein sollte.

Die zweite Familie von minimal nichtabelschen 2-Gruppen setzt sich aus den Gruppen

$$D = \langle x, y \mid x^{2^r} = y^2 = [x, y]^2 = [x, x, y] = [y, x, y] = 1 \rangle$$

mit $r \geq 2$ zusammen. Mit den Techniken von Brauer, Olsson und Külshammer finden wir hier relativ schnell alle Invarianten. Zum Beispiel zeigt sich, dass entsprechende (nichtnilpotente) Blöcke genau zwei irreduzible Brauer-Charaktere besitzen. Dadurch ist es auch möglich, alle oben angegebenen Vermutungen zu bestätigen. Eine vollständige Auflistung sämtlicher Ergebnisse über minimal nichtabelsche Defektgruppen im Fall $p = 2$ findet sich in Abschnitt 4.3.

Im Verlauf der Ausarbeitung treten verschiedene Probleme auf, die unabhängig von der Defektgruppe oder der Primzahl p sind. Die (Teil-)Lösungen dieser Probleme fassen wir in einem separaten Kapitel zusammen. Es geht dabei um Fragen über die Zerlegbarkeit von Cartanmatrizen von Blöcken und Brauers $k(B)$-Vermutung für 2-Blöcke mit „kleinem" Defekt. Ist zum Beispiel die Defektgruppe eines 2-Blocks B eine zentrale Erweiterung einer metazyklischen Gruppe mit einer zyklischen Gruppe, so können wir Brauers $k(B)$-Vermutung für B beweisen. Die gleiche Aussage gilt auch für Defektgruppen mit einer zyklischen zentralen Untergruppe vom Index kleiner gleich 8. Als Folgerung erhält man die $k(B)$-Vermutung für 2-Blöcke vom Defekt höchstens 4. Die Beweise dieser Aussagen verwenden unter anderem die Reduktionstheorie quadratischer Formen.

Im letzten Kapitel geben wir einige Anregungen für weitere Untersuchungen von Blöcken im Fall $p = 2$. Besonderes Augenmerk gilt hierbei den bizyklischen Defektgruppen, das heißt Produkten von zwei zyklischen Untergruppen. Die Struktur dieser Gruppen ist durch eine Klassifikation von Janko größtenteils bekannt (siehe [49]). Damit gelingt es uns, die Gestalt der Automorphismengruppe zu klären, und für eine spezielle Familie von bizyklischen Gruppen zu zeigen, dass jedes Fusionssystem nilpotent sein muss. Nach mehreren Kriterien werden dann weitere Familien von interessanten Defektgruppen ausgesucht. Auf der einen Seite halten wir es für sinnvoll, sich mit 2-Gruppen zu befassen, die möglichst viele Eigenschaften mit metazyklischen Gruppen gemeinsam haben. Auf der anderen Seite zeigt die Untersuchung in der vorliegenden Arbeit, welche Eigenschaften der Defektgruppe besonders hilfreich für die Berechnung der Blockinvarianten sind. Schließlich ist es sicher von Vorteil, wenn bereits eine gruppentheoretische Klassifikation dieser 2-Gruppen vorliegt. In diesem Sinn kann das Kapitel als Grundlage für weitere Arbeiten auf dem Gebiet der Blocktheorie dienen.

An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Burkhard Külshammer für seine äußerst kompetente Unterstützung während der Promotionsphase danken. Weiterer Dank geht an den Freistaat Thüringen und die Deutsche Forschungsgemeinschaft für die Finanzierung meiner Arbeit.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Definitionen und Sätze aus der Gruppen- und Darstellungstheorie eingeführt. Wir werden dabei die meisten Resultate nicht beweisen, sondern verweisen stattdessen auf die Standardliteratur. Die darstellungstheoretischen Aussagen findet man zum Beispiel in [70, 32], während die Theorie der endlichen Gruppen ausführlich in [45, 58] beschrieben wird. Einige elementare Begriffe im Zusammenhang mit Gruppen, Ringen, Algebren und Moduln werden wir stillschweigend als bekannt voraussetzen. Sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird, werden alle Gruppen endlich, alle Vektorräume endlich-dimensional und alle Moduln endlich erzeugte Linksmoduln sein. Außerdem setzen wir voraus, dass alle Ringe und Algebren ein Einselement enthalten. Wir werden viele Bezeichnungen erst dann einführen, wenn sie gebraucht werden. Zum späteren Nachschlagen dient das Stichwortverzeichnis am Ende der Arbeit.

1.1 Bewertungsringe

In dieser Arbeit bezeichnen wir mit K stets einen Körper der Charakteristik $\operatorname{char} K = 0$. Gelegentlich werden wir daher $\mathbb{Q} \subseteq K$ annehmen. Außerdem sei auf K eine *(exponentielle) Bewertung* gegeben, das heißt eine Abbildung $\nu : K^\times \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$ für $a, b \in K^\times$,

(ii) $\nu(a + b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$ für $a, b, a + b \in K^\times$.

Oft setzt man zusätzlich $\nu(0) := \infty$. In manchen Büchern definiert man multiplikative Bewertungen statt exponentielle. Diese haben ähnliche Eigenschaften, und führen zur gleichen Theorie. Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass ν ein Gruppenhomomorphismus $K^\times \to (\mathbb{R}, +)$ ist. Insbesondere ist stets $\nu(1) = 0$. Man bezeichnet das Bild $\nu(K^\times)$ als *Wertegruppe* von ν. Ist $\nu(K^\times)$ eine unendliche zyklische Gruppe, so nennt man die Bewertung *diskret*.

Das folgende Lemma gibt einige elementare Eigenschaften der Bewertung ν an.

Lemma 1.1. *Für $a, b \in K^\times$ gilt:*

(i) $\nu(-a) = \nu(a)$,

(ii) $\nu(a^{-1}) = -\nu(a)$,

(iii) $\nu(a) < \nu(b) \Rightarrow \nu(a + b) = \nu(a)$.

Wählt man eine reelle Zahl γ mit $0 < \gamma < 1$, so ist durch die Abbildung $d : K \times K \to \mathbb{R}$ mit $d(a, b) := \gamma^{\nu(a-b)}$ für $a, b \in K$ eine Metrik auf K gegeben. Per Konvention ist dabei $\gamma^{\nu(0)} = \gamma^\infty = 0$. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} d(a, c) = \gamma^{\nu(a-c)} = \gamma^{\nu(a-b+b-c)} &\leq \gamma^{\min\{\nu(a-b), \nu(b-c)\}} = \max\{\gamma^{\nu(a-b)}, \gamma^{\nu(b-c)}\} \\ &= \max\{d(a, b), d(b, c)\} \leq d(a, b) + d(b, c) \end{aligned}$$

für $a, b, c \in K$. Daher lassen sich die aus der Analysis bekannten Begriffe wie Grenzwert, Konvergenz, Cauchyfolge usw. auf K definieren. Verschiedene Wahlen von γ führen dabei stets zur gleichen Topologie. Man nennt K bzw. ν *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in K konvergiert. Ist K nicht vollständig, so kann man stets einen im Wesentlichen eindeutig bestimmten vollständigen Körper $\widehat{K} \supseteq K$ mit Bewertung $\widehat{\nu}$ konstruieren, sodass K dicht in $\widehat{K}$ liegt und $\widehat{\nu}$ eine Fortsetzung von ν ist. Man nennt dann $\widehat{K}$ die *Vervollständigung* von K. Dabei bleibt die Wertegruppe erhalten. Insbesondere ist $\widehat{\nu}$ diskret, falls ν diskret ist.

Die Menge $R := \{a \in K : \nu(a) \geq 0\}$ bildet einen Teilring von K, dessen Quotientenkörper zu K isomorph ist. Man bezeichnet R als *Bewertungsring* von K und ν. Ist ν diskret, so ist R sogar ein lokaler Hauptidealring. *Lokal* heißt dabei, dass alle nichtinvertierbaren Elemente von R ein (maximales) Ideal bilden. Dieses ist gegeben durch $I := \{a \in K : \nu(a) > 0\}$. Man nennt I das *Bewertungsideal* von R. Da I auch ein Hauptideal ist, existiert ein Element $\pi \in R$ mit $I = (\pi) = R\pi$. Bekanntlich ist dann der Restklassenring $F := R/(\pi)$ ein Körper. Ist K vollständig, so nennt man auch R *vollständig*.

In der modularen Darstellungstheorie untersucht man den Zusammenhang zwischen Darstellungen von endlichen Gruppen über Körpern der Charakteristik 0 und über Körpern mit positiver Charakteristik. Dafür wählt man K so, dass F die Charakteristik p für eine vorgegebene Primzahl p hat. Wir werden kurz einen Weg beschreiben, wie man dies erreichen kann.

Dazu wählen wir $K = \mathbb{Q}$ und eine Primzahl p. Jedes Element in $K \setminus \{0\}$ kann man dann in der Form $p^a \frac{b}{c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $p \nmid b$ und $p \nmid c$ schreiben. Dabei ist a eindeutig bestimmt, und wir können ν durch $\nu(p^a \frac{b}{c}) := a$ definieren. Die so konstruierte diskrete Bewertung nennt man die *p-adische* Bewertung. Vervollständigt man K, so erhält man den Körper $\mathbb{Q}_p$ der *p-adischen Zahlen*. Der entsprechende Bewertungsring $\mathbb{Z}_p$ heißt Ring der *ganzen p-adischen Zahlen*. Der Restklassenkörper $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ ist in diesem Fall isomorph zum Körper $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Auf diese Weise erreicht man, dass F die Charakteristik p hat.

In den Anwendungen benötigt man aber häufig, dass F zusätzlich algebraisch abgeschlossen ist. Dies kann man ebenfalls erreichen, indem man K durch einen geeigneten Teilkörper des algebraischen Abschlusses von K ersetzt. Dabei bleibt die Wertegruppe erhalten. Vervollständigt man nun gegebenenfalls ein weiteres Mal, so erreicht man schließlich, dass das Tripel (K, R, F) folgende Eigenschaften hat:

(i) K ist ein Körper der Charakteristik 0.

(ii) R ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K.

(iii) $F = R/(\pi)$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p für eine Primzahl p.

Sind alle drei Eigenschaften erfüllt, so nennt man (K, R, F) ein *p-modulares System*. Durch Adjunktion kann man darüber hinaus verlangen, dass K eine bestimmte (oder endlich viele) Einheitswurzeln enthält. Dabei bleibt die Wertegruppe zwar nicht unbedingt erhalten, aber die Bewertung ist immer noch diskret und vollständig, und der Restklassenkörper verändert sich nicht. Später werden wir davon Gebrauch machen.

1.2 Gruppenalgebren und Blöcke

In diesem und in allen weiteren Kapiteln sei (K, R, F) stets ein p-modulares System für eine Primzahl p und G eine endliche Gruppe. Die *Gruppenalgebra* KG ist dann die Menge aller „formalen" Linearkombinationen von Elementen aus G, das heißt

$$KG := \Big\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in K \text{ für } g \in G \Big\}.$$

Für $\sum_{g\in G} \alpha_g g, \sum_{h \in G} \beta_h h \in KG$ und $\lambda \in K$ wird KG durch

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{h\in G} \beta_h h := \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g \cdot \sum_{h\in G} \beta_h h := \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h gh = \sum_{g\in G} \Bigg(\sum_{\substack{h,k\in G,\\ hk=g}} \alpha_h \beta_k \Bigg) g,$$

$$\lambda \Bigg(\sum_{g\in G} \alpha_g g \Bigg) := \sum_{g\in G} (\lambda \alpha_g) g$$

tatsächlich zu einer K-Algebra. Genauso kann man auch die Gruppenalgebren RG und FG definieren. Wir werden nun einige Begriffe im Zusammenhang mit der Gruppenalgebra KG einführen. Diese übertragen sich völlig analog auf RG und FG.

Das *Zentrum* $\mathrm{Z}(KG)$ der Gruppenalgebra KG wird durch

$$\mathrm{Z}(KG) := \{x \in KG : xy = yx \text{ für } y \in KG\}$$

definiert. Es bildet offenbar eine Unteralgebra von KG. Bezeichnet man die Menge aller Konjugationsklassen von G mit $\mathrm{Cl}(G)$, so bilden die *Klassensummen* $L^+ := \sum_{x\in L} x \in KG$ für $L \in \mathrm{Cl}(G)$ eine K-Basis von $\mathrm{Z}(KG)$. Insbesondere ist $\dim_K \mathrm{Z}(KG) = |\mathrm{Cl}(G)|$.

Ein Element $e \in KG$ mit $e^2 = e$ nennt man *Idempotent*. Offenbar sind 0 und 1 stets Idempotente. Zwei Idempotente e, f nennt man *orthogonal*, falls $ef = fe = 0$ gilt. Ein Idempotent $e \neq 0$ heißt *primitiv*, wenn aus jeder Zerlegung $e = f + g$ mit orthogonalen Idempotenten f, g stets $f = 0$ oder $g = 0$ folgt. Die primitiven Idempotente von $\mathrm{Z}(KG)$ nennt man *Blockidempotente* von KG. Zerlegt man $1 \in \mathrm{Z}(KG)$ in paarweise orthogonale Blockidempotente

$$1 = e_1 + \ldots + e_n, \tag{1.1}$$

so treten dabei alle Blockidempotente von KG auf. Die entsprechenden Ideale $B_i := KGe_i = e_iKG = e_iKGe_i$ für $i = 1, \ldots, n$ werden als *(p-)Blöcke* von KG bezeichnet. Sie sind selbst wieder K-Algebren mit e_i als Einselement. Die Menge aller Blöcke von KG sei $\mathrm{Bl}(KG)$. Analog erhält man dann eine Zerlegung der Gruppenalgebra

$$KG = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$$

als direkte Summe von Idealen.

Definition 1.2. Die Abbildung

$$\varepsilon : KG \to K, \ \sum_{g\in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g\in G} \alpha_g$$

heißt *Augmentationsabbildung* von KG. Sie ist ein Homomorphismus von K-Algebren.

Wendet man ε auf die Gleichung (1.1) an, so ergibt sich $1 = \varepsilon(1) = \varepsilon(e_1 + \ldots + e_n) = \varepsilon(e_1) + \ldots + \varepsilon(e_n)$. Folglich existiert ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\varepsilon(e_i) \neq 0$. Wegen $\varepsilon(e_i)\varepsilon(e_j) = \varepsilon(e_i e_j) = \varepsilon(0) = 0$ ist dann $\varepsilon(e_j) = 0$ für alle $j \neq i$ und damit $\varepsilon(e_i) = 1$. Man nennt e_i das *Hauptblockidempotent* und $B_i := KGe_i$ den *Hauptblock* von KG. Häufig verwendet man für den Hauptblock (bzw. das Hauptblockidempotent) von KG auch die Bezeichnung $B_0(KG)$ (bzw. $e_0(KG)$).

Wir betrachten nun die Blöcke von RG und FG. Sei dafür $\overline{x} := x + (\pi) \in R/(\pi) = F$ für $x \in R$ und $\overline{\sum_{g \in G} \alpha_g g} := \sum_{g \in G} \overline{\alpha_g} g \in FG$ für $\sum_{g \in G} \alpha_g g \in RG$.

Satz 1.3. *Die kanonische Abbildung $RG \to FG$, $x \mapsto \overline{x}$ induziert eine Bijektion zwischen den Blockidempotenten von RG und FG. Dabei wird das Hauptblockidempotent von RG auf das Hauptblockidempotent von FG abgebildet.*

Die meisten Eigenschaften von Blöcken von RG übertragen sich somit auf die entsprechenden Blöcke von FG. Dies werden wir ab jetzt stets benutzen.

1.3 Defektgruppen

Für ein Element $x \in G$ bezeichnen wir mit $\mathrm{C}_G(x)$ den *Zentralisator* von x in G, das heißt

$$\mathrm{C}_G(x) := \{y \in G : yx = xy\}.$$

Analog sei $\mathrm{N}_G(U) := \{g \in G : gUg^{-1} = U\}$ für eine Teilmenge $U \subseteq G$ der *Normalisator* von U in G. Für die Menge aller p-Sylowgruppen von G schreiben wir $\mathrm{Syl}_p(G)$. Für eine Konjugationsklasse L von G und $x \in L$ bezeichnet man die p-Sylowgruppen von $\mathrm{C}_G(x)$ als *Defektgruppen* von L. Die Menge

$$\mathrm{Def}(L) := \bigcup_{x \in L} \mathrm{Syl}_p(\mathrm{C}_G(x))$$

aller Defektgruppen von L bildet nach dem Satz von Sylow eine Konjugationsklasse von p-Untergruppen von G. Hat $D \in \mathrm{Def}(L)$ die Ordnung $|D| = p^d$, so nennt man $d =: d(L)$ den *Defekt* von L.

Hat man zwei Untergruppen P und Q von G mit der Eigenschaft, dass ein Konjugiertes von Q in P enthalten ist, so schreiben wir dafür $Q \leq_G P$. Ist Q zu P selbst konjugiert, so schreiben wir $Q =_G P$. Für $x \in G$ schreiben wir $x \in_G P$, falls ein Konjugiertes von x in P liegt. Für eine Teilmenge X von FG sei FX der von den Elementen in X aufgespannte F-Untervektorraum von FG.

Definition 1.4. Für eine p-Untergruppe Q von G definiert man

$$\mathrm{I}_Q(FG) := F\{L^+ : L \in \mathrm{Cl}(G),\ P \leq_G Q \text{ für } P \in \mathrm{Def}(L)\}.$$

Unter Verwendung der Eigenschaft $\operatorname{char} F = p$ kann man zeigen, dass $\mathrm{I}_Q(FG)$ für jede p-Untergruppe Q von G ein Ideal in $\mathrm{Z}(FG)$ ist. Ist P eine weitere p-Untergruppe von G mit $P \leq_G Q$, so gilt offenbar $\mathrm{I}_P(FG) \subseteq \mathrm{I}_Q(FG)$. Für $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ ist $\mathrm{I}_Q(FG) = \mathrm{Z}(FG)$. Daher existiert für jedes Blockidempotent $e \in \mathrm{Z}(FG)$ von FG stets eine p-Untergruppe D von G mit $e \in \mathrm{I}_D(FG)$ und $e \notin \mathrm{I}_P(FG)$ für jede p-Untergruppe $P < D$. Ein solches

D nennt man dann *Defektgruppe* des Blocks $B := FGe$. Auch hier ist die Menge $\mathrm{Def}(B)$ aller Defektgruppen eines Blocks B eine Konjugationsklasse von p-Untergruppen von G. Hat $D \in \mathrm{Def}(B)$ die Ordnung $|D| = p^d$, so nennt man $d =: d(B)$ den *Defekt* von B. Man kann zeigen, dass die Defektgruppen des Hauptblocks von FG gerade die p-Sylowgruppen von G sind. Ist $\mathrm{O}_p(G)$ der größte p-Normalteiler von G, so gilt $\mathrm{O}_p(G) \leq D$ für jede Defektgruppe D eines Blocks von FG. Mit Hilfe der Bijektion aus Satz 1.3 kann man die Begriffe Defektgruppe und Defekt auch für Blöcke von RG definieren.

1.4 Charaktere

Die Betrachtung der Charaktere einer endlichen Gruppe ist in der Regel einfacher, wenn man zusätzliche Eigenschaften von dem zu Grunde liegenden Körper fordert. Wir setzen daher ab jetzt voraus, dass K alle $|G|$-ten Einheitswurzeln enthält. Die Menge der irreduziblen Charaktere von G über K werden wir mit $\mathrm{Irr}(G)$ bezeichnen. Da K die Charakteristik 0 hat, gilt bekanntlich $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G)|$. Außerdem ist $\mathrm{Irr}(G)$ eine Basis des Vektorraums $\mathrm{CF}(G)$ aller Klassenfunktionen von G über K. Wie üblich kann man $\mathrm{CF}(G)$ mit einem Skalarprodukt versehen:

$$(\chi \mid \psi)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) \qquad \text{für } \chi, \psi \in \mathrm{CF}(G).$$

Ist H eine Untergruppe von G, so erhält man durch Einschränken (Restriktion) und Induktion lineare Abbildungen $\mathrm{Res}^G_H : \mathrm{CF}(G) \to \mathrm{CF}(H)$ bzw. $\mathrm{Ind}^G_H : \mathrm{CF}(H) \to \mathrm{CF}(G)$. Für $\chi \in \mathrm{CF}(G)$ und $\psi \in \mathrm{CF}(H)$ ist dabei

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^G_H(\chi)(x) &:= \chi(x) && \text{für } x \in H, \\ \mathrm{Ind}^G_H(\psi)(x) &:= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{y \in G, \\ yxy^{-1} \in H}} \psi(yxy^{-1}) && \text{für } x \in G. \end{aligned}$$

Den Ring der verallgemeinerten Charaktere von G über K bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G)$. Für eine Untergruppe $H \leq G$ gilt dann $\mathrm{Res}^G_H(\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G)) \subseteq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(H)$ und $\mathrm{Ind}^G_H(\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(H)) \subseteq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G)$. Wir werden nun jedem irreduziblen Charakter von G einen Block von RG zuordnen.

Definition 1.5. Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $L \in \mathrm{Cl}(G)$ und $g \in L$ definieren wir

$$\omega_\chi(L^+) := \frac{|L|}{\chi(1)}\chi(g).$$

Man kann dann einen Homomorphismus von K-Algebren $\mathrm{Z}(KG) \to K$ konstruieren, indem man ω_χ linear fortsetzt. Da $\omega_\chi(L^+)$ eine ganz-algebraische Zahl ist und R als Hauptidealring ganz abgeschlossen ist, gilt sogar $\omega_\chi(L^+) \in R$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $L \in \mathrm{Cl}(G)$. Definiert man nun $\overline{\omega_\chi}(L^+) := \overline{\omega_\chi(L^+)}$, so erhält man einen Homomorphismus von F-Algebren $\overline{\omega_\chi} : \mathrm{Z}(FG) \to F$.

Satz 1.6. *Für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ existiert ein eindeutig bestimmtes Blockidempotent e von RG mit $\omega_\chi(e) = 1$. Für alle anderen Blockidempotente f von RG gilt dann $\omega_\chi(f) = 0$.*

Definition 1.7. Gegebenenfalls sagt man: χ *gehört* zum Block $B := RGe$.

Für zwei irreduzible Charaktere $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ gilt außerdem: χ und ψ gehören genau dann zum gleichen Block, falls $\overline{\omega_\chi} = \overline{\omega_\psi}$ gilt. Gehört χ zum Block B von RG, so nennt man $\overline{\omega_B} := \overline{\omega_\chi}$ den *zentralen Charakter* von B. Wegen der obigen Äquivalenz kommt es dabei nicht auf die Wahl des Charakters χ an. Umgekehrt gibt es zu jedem Block B von RG stets einen irreduziblen Charakter, der zu B gehört. Man kann zeigen, dass jeder Homomorphismus von Algebren $\mathrm{Z}(FG) \to F$ ein zentraler Charakter eines Blocks ist. Wir werden die Menge der irreduziblen Charaktere, die zu B gehören, mit $\mathrm{Irr}(B)$ bezeichnen. Damit erhält man eine disjunkte Zerlegung

$$\mathrm{Irr}(G) = \dot{\bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(RG)}} \mathrm{Irr}(B).$$

Analog sei $\mathrm{CF}(B)$ der K-Untervektorraum von $\mathrm{CF}(G)$, der von $\mathrm{Irr}(B)$ aufgespannt wird und $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(B) := \mathrm{CF}(B) \cap \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G)$. Außerdem setzen wir $k(B) := |\mathrm{Irr}(B)|$, wobei $|\mathrm{Irr}(B)|$ die Anzahl der Elemente in $\mathrm{Irr}(B)$ ist. Bezeichnet man mit $\overline{B}$ den B entsprechenden Block in FG, so ist auch $k(B) = \dim_F \mathrm{Z}(\overline{B})$. Dabei ist $\mathrm{Z}(\overline{B})$ das Zentrum der Algebra $\overline{B}$. Diese Verfeinerung der Gleichung $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G)| = \dim_F \mathrm{Z}(FG)$ liefert eine Definition von $k(B)$, die nicht mehr von G, sondern nur noch von der Algebrastruktur von B bzw. $\overline{B}$ abhängt.

Ist $\chi = 1_G$ der triviale Charakter von G, so stimmt ω_χ offenbar mit der Einschränkung der Augmentationsabbildung ε überein. Daher gehört 1_G zum Hauptblock von RG.

Sei nun D eine Defektgruppe von $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ und $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ mit $D \subseteq P$. Man kann zeigen, dass dann für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ stets $|P : D| \mid \chi(1)$ gilt. Daher existiert eine Zahl $h(\chi) \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $|P : D|p^{h(\chi)} \mid \chi(1)$ und $|P : D|p^{h(\chi)+1} \nmid \chi(1)$. Man nennt $h(\chi)$ die *Höhe* von χ. Bekanntlich enthält jeder Block Charaktere der Höhe 0. Wir verfeinern nun die Definition von $k(B)$.

Definition 1.8. Für $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ und $i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$k_i(B) := |\{\chi \in \mathrm{Irr}(B) : h(\chi) = i\}|.$$

Hat $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ Defekt kleiner gleich 2, so haben alle Charaktere in $\mathrm{Irr}(B)$ die Höhe 0, das heißt $k(B) = k_0(B)$. Allgemeiner gilt $h(\chi) \leq d - 2$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, falls B den Defekt $d \geq 2$ hat.

In einigen Arbeiten verwendet man statt der Höhe den komplementären Begriff des Defekts eines Charakters. Gehört ein Charakter χ zu einem Block mit Defekt d, so ist der *Defekt* $d(\chi)$ von χ durch $d(\chi) := d - h(\chi) \in \mathbb{N}_0$ definiert.

Definition 1.9. Für $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ und $i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$k^i(B) := |\{\chi \in \mathrm{Irr}(B) : d(\chi) = i\}|.$$

Als Nächstes werden wir Brauer-Charaktere definieren. Ist $\mu \in K$ eine $|G|$-te Einheitswurzel, so gilt $|G|\nu(\mu) = \nu(\mu^{|G|}) = \nu(1) = 0$ für die Bewertung ν auf K. Folglich ist $\mu \in R$. Hat G die Ordnung $|G| = p^a r$ mit $p \nmid r$, so kann man zeigen, dass für jede r-te Einheitswurzel λ in F genau eine r-te Einheitswurzel $\widehat{\lambda}$ in R mit $\lambda = \widehat{\lambda} + (\pi)$ existiert.

Für die Menge aller p-Elemente von G schreiben wir G_p. Analog sei $G_{p'}$ die Menge der p-regulären Elemente. Hat man nun eine Matrixdarstellung $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ von G über F gegeben, und ist $g \in G_{p'}$, so gilt $\Delta(g)^r = \Delta(g^r) = \Delta(1) = 1$. Die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ von $\Delta(g)$ sind daher r-te Einheitswurzeln, und es gilt

$$\operatorname{Spur} \Delta(g) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Durch $\varphi_\Delta(g) := \widehat{\lambda_1} + \ldots + \widehat{\lambda_n} \in R$ ist dann eine Abbildung $\varphi_\Delta : G_{p'} \to R$ gegeben. Man nennt φ_Δ den *Brauer-Charakter* von Δ. Ist Δ irreduzibel, so sagt man entsprechend, dass φ_Δ ein *irreduzibler* Brauer-Charakter von G ist. Die Menge der irreduziblen Brauer-Charaktere von G bezeichnen wir mit $\mathrm{IBr}(G)$. Bekanntlich ist dann $|\mathrm{IBr}(G)|$ gerade die Anzahl der p-regulären Konjugationsklassen von G. Außerdem ist $\mathrm{IBr}(G)$ eine Basis des K-Vektorraums aller Klassenfunktionen $\mathrm{BCF}(G)$ auf $G_{p'}$. Auf diesem Raum hat man auch ein Skalarprodukt:

$$(\chi \mid \psi)_{G_{p'}} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{p'}} \chi(g)\psi(g^{-1}) \qquad \text{für } \chi, \psi \in \mathrm{BCF}(G).$$

Wir zeigen nun, dass man auch die irreduziblen Brauer-Charaktere von G auf die Blöcke von RG aufteilen kann. Sei dafür $\Delta : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ wieder eine irreduzible Matrixdarstellung von G über F, und sei $V := F^n$ der entsprechende einfache FG-Linksmodul. Außerdem sei $FG = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ die Zerlegung der Gruppenalgebra FG in ihre Blöcke $B_1, \ldots, B_m$. Dann erhält man durch $V = B_1V \oplus \ldots \oplus B_mV$ auch eine Zerlegung von V als direkte Summe von Untermoduln. Da V einfach ist, existiert ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $B_iV = V$ und $B_jV = 0$ für alle $j \neq i$. Man sagt dann: V *gehört* zum Block B_i von FG. Man sagt auch: V *gehört* zu $\widehat{B_i} \in \mathrm{Bl}(RG)$, falls $\widehat{B_i}$ der B_i entsprechende Block von RG ist. Ist schließlich φ_Δ der Brauer-Charakter von Δ, so *gehört* auch φ_Δ zum Block $\widehat{B_i}$. Umgekehrt gibt es zu jedem Block B von RG stets einen irreduziblen Brauer-Charakter, der zu B gehört. Die Menge aller irreduziblen Brauer-Charaktere, die zu B gehören, bezeichnen wir mit $\mathrm{IBr}(B)$. Damit erhält man wieder eine disjunkte Zerlegung

$$\mathrm{IBr}(G) = \dot{\bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(RG)}} \mathrm{IBr}(B).$$

Wir setzen außerdem $l(B) := |\mathrm{IBr}(B)|$. Man kann dann zeigen, dass für einen Block B von RG stets $l(B) \le k(B)$ gilt. Hat B positiven Defekt, so gilt sogar $l(B) < k(B)$.

Offenbar kann man jeden einfachen FG-Modul, der zum Block $B \in \mathrm{Bl}(FG)$ gehört, auch als einfachen B-Modul auffassen, indem man die Operation von FG auf B einschränkt. Umgekehrt kann man aus jedem einfachen B-Modul einen einfachen FG-Modul konstruieren, indem man die anderen Blöcke trivial operieren lässt. Auf diese Weise sieht man, dass $l(B)$ auch die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher B-Moduln ist. Somit hat man eine Definition von $l(B)$ die nicht mehr von G, sondern nur von der Algebrastruktur von B abhängt.

1.5 Cartan- und Zerlegungsmatrizen

Wir werden in diesem Abschnitt zwei Matrizen einführen, die für die Untersuchung von $k(B)$ und $l(B)$ für einen Block B von RG äußerst wichtig sind. Dafür benötigen wir noch einige Begriffe im Zusammenhang mit Idempotenten und Moduln.

Zwei primitive Idempotente e und f von FG nennt man *äquivalent*, falls die FG-Moduln FGe und FGf isomorph sind. Sei nun $e_1, \dots, e_n$ ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen primitiver Idempotente von FG. Nach dem Satz von Krull und Schmidt ist dann $FGe_1, \dots, FGe_n$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen projektiver unzerlegbarer FG-Moduln. Für einen beliebigen endlich erzeugten FG-Modul V bezeichnen wir mit $\mathrm{Rad}(V)$ den Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von V. Man nennt $\mathrm{Rad}(V)$ das *Radikal* von V.

Satz 1.10. *Die Abbildung $V \mapsto V/\mathrm{Rad}(V)$ vermittelt eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen projektiver unzerlegbarer FG-Moduln und der Menge der Isomorphieklassen einfacher FG-Moduln.*

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass $|\mathrm{IBr}(G)|$ die Anzahl der Isomorphieklassen projektiver unzerlegbarer FG-Moduln und die Anzahl der Äquivalenzklassen primitiver Idempotente von FG ist. Mit obigen Bezeichnungen gilt also $n = |\mathrm{IBr}(G)|$. Da jeder endlich erzeugte FG-Modul V auch ein endlich-dimensionaler F-Vektorraum ist, besitzt V stets eine Kompositionsreihe.

Definition 1.11. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir die *Cartaninvariante* c_{ij} von FG als die Anzahl der Kompositionsfaktoren von FGe_i die zu $FGe_j/\mathrm{Rad}(FGe_j)$ isomorph sind. Die Matrix $C := (c_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt *Cartanmatrix* von FG.

Von der Cartanmatrix C von FG sind viele Eigenschaften bekannt. Zum Beispiel kann man zeigen, dass C stets symmetrisch, regulär und positiv definit ist. Offenbar hängt C aber von der Reihenfolge der primitiven Idempotente $e_1, \dots, e_n$ ab. Wir versuchen daher als Nächstes, C auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Dazu seien $B_1, \dots, B_m$ die Blöcke von FG. Für einfache FG-Moduln $FGe_i/\mathrm{Rad}(FGe_i)$ und $FGe_j/\mathrm{Rad}(FGe_j)$, die zu verschiedenen Blöcken von FG gehören, ist $c_{ij} = c_{ji} = 0$. Sortiert man also die einfachen FG-Moduln entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu den Blöcken $B_1, \dots, B_m$, so hat C die Gestalt

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_m \end{pmatrix},$$

wobei C_i für $i = 1, \dots, m$ eine $l(B_i) \times l(B_i)$-Matrix ist. Man nennt C_i die *Cartanmatrix* von B_i.

Wir definieren nun (verallgemeinerte) Zerlegungszahlen. Sei dazu $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $u \in G_p$ und $H := \mathrm{C}_G(u)$. Dann kann man $\mathrm{Res}_H^G(\chi)$ als ganzzahlige Linearkombination irreduzibler Charaktere von H schreiben. Es existieren also Zahlen $a_{\chi\psi} \in \mathbb{N}_0$ für $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ mit

$$\mathrm{Res}_H^G(\chi) = \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(H)} a_{\chi\psi}\psi. \tag{1.2}$$

Da u im Zentrum $\mathrm{Z}(H)$ von H liegt, existiert für $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ eine $|\langle u \rangle|$-te Einheitswurzel $\zeta_\psi \in K$ mit $\psi(us) = \zeta_\psi \psi(s)$ für alle $s \in H_{p'}$. Außerdem kann man zeigen, dass die Einschränkung von $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$ auf $H_{p'}$ stets eine ganzzahlige Linearkombination von irreduziblen Brauer-Charakteren von H ist. Folglich existieren Zahlen $d_{\psi\mu} \in \mathbb{N}_0$ für $\mu \in \mathrm{IBr}(H)$ mit

$$\psi|_{H_{p'}} = \sum_{\mu \in \mathrm{IBr}(H)} d_{\psi\mu}\mu. \tag{1.3}$$

Setzt man die beiden Gleichungen (1.2) und (1.3) zusammen, so erhält man

$$\chi(us) = \sum_{\mu \in \mathrm{IBr}(H)} \Bigg(\sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(H)} a_{\chi\psi}\zeta_\psi d_{\psi\mu} \Bigg) \mu(s)$$

für $s \in H_{p'}$. Die Zahlen

$$d^u_{\chi\mu} := \sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(H)} a_{\chi\psi}\zeta_\psi d_{\psi\mu}$$

heißen dabei *verallgemeinerte Zerlegungszahlen* von u, χ und μ. Im Fall $u = 1$ nennt man $d^1_{\chi\mu} = d_{\chi\mu}$ auch nur *(gewöhnliche) Zerlegungszahl* von χ und μ.

Wir werden die verallgemeinerten Zerlegungszahlen nun auch als Matrix anordnen. Dafür wählt man ein Repräsentantensystem $u_1, \ldots, u_n$ für die p-Konjugationsklassen von G. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei außerdem $s_{i,1}, \ldots, s_{i,l_i}$ ein Repräsentantensystem für die p-regulären Konjugationsklassen von $\mathrm{C}_G(u_i)$. Man zeigt dann leicht, dass die Elemente $u_i s_{ij}$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, l_i\}$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G bilden. Insbesondere ist $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G)| = \sum_{i=1}^n |\mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(u_i))|$. Konstruiert man nun die Matrix $D = (d^{u_i}_{\chi\mu})$, indem man in jeder Zeile $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ festhält und $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\mu \in \mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(u_i))$ laufen lässt, so entsteht eine $|\mathrm{Cl}(G)| \times |\mathrm{Cl}(G)|$-Matrix. Man nennt D die *vollständige Zerlegungsmatrix* von FG (oder RG). Setzt man $u = 1$ fest und lässt nur $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\mu \in \mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(1)) = \mathrm{IBr}(G)$ laufen, so erhält man die *(gewöhnliche) Zerlegungsmatrix* $D = (d_{\chi\mu})$ von FG. Sie enthält die (gewöhnlichen) Zerlegungszahlen, und ist im Gegensatz zur vollständigen Zerlegungsmatrix eine $|\mathrm{Cl}(G)| \times |\mathrm{IBr}(G)|$-Matrix. Wir wollen die Zerlegungsmatrix von FG auch auf eine einfache Form bringen.

Dazu seien $B_1, \ldots, B_m$ die Blöcke von FG. Ordnet man nun $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\mu \in \mathrm{IBr}(G)$ entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu diesen Blöcken, so hat die Zerlegungsmatrix D von FG die Form

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m \end{pmatrix},$$

wobei D_i für $i = 1, \ldots, m$ eine $k(B_i) \times l(B_i)$-Matrix ist. Man nennt D_i die *Zerlegungsmatrix* von B_i. Bezeichnen wir mit C (bzw. C_i) die Cartanmatrix von FG (bzw. B_i), so bestehen folgende Zusammenhänge:

$$C = D^{\mathrm{T}} D \quad \text{und} \quad C_i = D_i^{\mathrm{T}} D_i.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass man auch die vollständige Zerlegungsmatrix von FG auf eine einfache Form bringen kann.

1.6 Brauer-Korrespondenz

Bei der Brauer-Korrespondenz sowie bei einigen anderen Korrespondenzen in der Darstellungstheorie geht es darum, Eigenschaften der Gruppenalgebra FG auf Eigenschaften einer „kleineren“ Gruppenalgebra FH für eine Untergruppe $H \leq G$ zurückzuführen.

Definition 1.12. Sei Q eine p-Untergruppe von G. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Br}_Q^G : \mathrm{Z}(FG) \to \mathrm{Z}(F\,\mathrm{C}_G(Q)),\ L^+ \mapsto (L \cap \mathrm{C}_G(Q))^+$$

für $L \in \mathrm{Cl}(G)$. Dabei sei $\varnothing^+ := 0$. Man nennt Br_Q^G den *Brauer-Homomorphismus* von G bzgl. Q.

Wie der Name vermuten lässt, ist Br_Q^G tatsächlich ein Homomorphismus von Algebren. Analog zum Brauer-Homomorphismus kann man für jede Untergruppe $H \leq G$ eine lineare Abbildung $\eta_H^G : \mathrm{Z}(FG) \to \mathrm{Z}(FH)$ durch $\eta_H^G(L^+) := (L \cap H)^+$ für $L \in \mathrm{Cl}(G)$ definieren. Im Allgemeinen ist dann η_H^G aber kein Homomorphismus von Algebren mehr. Ist nun b ein Block von RH und $\overline{\omega_b}$ der zentrale Charakter von b, so kann man η_H^G mit $\overline{\omega_b}$ verknüpfen, und erhält damit eine lineare Abbildung $\overline{\omega_b} \circ \eta_H^G : \mathrm{Z}(FG) \to \mathrm{Z}(FH) \to F$. Ist diese Abbildung sogar ein Homomorphismus von Algebren, so existiert ein eindeutig bestimmter Block B von RG mit $\overline{\omega_b} \circ \eta_H^G = \overline{\omega_B}$. In diesem Fall schreibt man $B = b^G$, und sagt: B ist der *Brauer-Korrespondent* von b und umgekehrt. Hat b einen Brauer-Korrespondenten in RG, so sagt man auch: b^G ist *definiert*. Ist zum Beispiel $H = \mathrm{C}_G(Q)$ für eine p-Untergruppe Q von G, so ist $\eta_H^G = \mathrm{Br}_Q^G$, und b^G ist definiert. Mit Hilfe der Defektgruppen von b kann man ein weiteres hinreichendes Kriterium dafür angeben, dass b^G definiert ist.

Satz 1.13. *Sei $H \leq G$ und b ein Block von RH mit Defektgruppe D. Ist $\mathrm{C}_G(D) \subseteq H$, so ist b^G definiert.*

In der Situation von Satz 1.13 kann man mit Hilfe von Brauers dritten Hauptsatz auch eine Aussage über die Hauptblöcke treffen.

Satz 1.14 (Brauers dritter Hauptsatz)**.** *Sei $H \leq G$ und b ein Block von RH mit Defektgruppe D. Im Fall $\mathrm{C}_G(D) \subseteq H$ ist b genau dann der Hauptblock von RH, falls b^G der Hauptblock von RG ist.*

Brauers erster Hauptsatz hingegen zeigt, dass in manchen Fällen die Brauer-Korrespondenz $b \mapsto b^G$ sogar eine Bijektion zwischen bestimmten Blöcken von FH und FG ist.

Satz 1.15 (Brauers erster Hauptsatz)**.** *Ist Q eine p-Untergruppe von G und $\mathrm{N}_G(Q) \leq H \leq G$, so ist die Abbildung $b \mapsto b^G$ eine Bijektion zwischen der Menge der Blöcke von RH mit Defektgruppe Q und der Menge der Blöcke von RG mit Defektgruppe Q. Ist dabei $e \in \mathrm{Z}(RH)$ das Blockidempotent von b und $f \in \mathrm{Z}(RG)$ das Blockidempotent von b^G, so gilt $\mathrm{Br}_Q^H(\overline{e}) = \mathrm{Br}_Q^G(\overline{f})$.*

Gilt $H = \mathrm{N}_G(Q)$ in der Situation von Satz 1.15, so ist sogar $\overline{e} = \mathrm{Br}_Q^G(\overline{f})$.

Wir werden für diese Arbeit noch folgende weitere Eigenschaften der Brauer-Korrespondenz benötigen. Sei B ein Block von RG mit Defektgruppe P und $b \in \mathrm{Bl}(RH)$ ein Brauer-Korrespondent von B für eine Untergruppe $H \leq G$. Hat dann b die Defektgruppe Q, so gilt stets $Q \leq_G P$. Nehmen wir nun an, dass eine weitere Untergruppe K von G mit

$K \leq H \leq G$ gegeben ist. Außerdem sei b nun ein Block von RK, und b^H sei definiert. Ist dann b^G oder $(b^H)^G$ definiert, so ist sowohl b^G also auch $(b^H)^G$ definiert, und es gilt $(b^H)^G = b^G$. Insbesondere ist die Brauer-Korrespondenz transitiv.

Wir betrachten nun noch einmal die vollständige Zerlegungsmatrix von FG. Dazu wählen wir wieder ein Repräsentantensystem $u_1, \ldots, u_n$ für die p-Konjugationsklassen von G. Da $\langle u_i \rangle$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine p-Untergruppe von G ist, hat jeder Block von $R\,\mathrm{C}_G(u_i) = R\,\mathrm{C}_G(\langle u_i \rangle)$ einen Brauer-Korrespondenten in RG. Seien nun $B_1, \ldots, B_m$ die Blöcke von RG. Wir sortieren die irreduziblen Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu diesen Blöcken. Analog werden die Blöcke $b \in \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u_i))$ entsprechend ihrer Brauer-Korrespondenten $B_1, \ldots, B_m$ sortiert. Schließlich ordnet man $\mu \in \bigcup_{i=1}^n \mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(u_i))$ entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu den Blöcken $b \in \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u_i))$. Ist dann $\chi \in \mathrm{Irr}(B_i)$ mit $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\mu \in \mathrm{IBr}(b)$ für einen Block $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u_j))$ mit $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $b^G \neq B$, so ist $d^{u_j}_{\chi\mu} = 0$ (dies ist eine Version von Brauers zweitem Hauptsatz). Also hat die vollständige Zerlegungsmatrix D von FG bzgl. dieser Anordnung die Form

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m \end{pmatrix},$$

wobei D_i für $i = 1, \ldots, m$ eine $k(B_i) \times k(B_i)$-Matrix ist. Man nennt D_i die *vollständige Zerlegungsmatrix* von B_i. Mit dieser Aufteilung erhält man auch eine Formel für $k(B)$ für einen Block B von RG.

Satz 1.16. *Sei B ein Block von RG, und seien $u_1, \ldots, u_n$ Repräsentanten für die p-Konjugationsklassen von G. Dann gilt*

$$k(B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u_i)),\\ b^G = B}} l(b). \tag{1.4}$$

Man kann diese Formel wie folgt verfeinern. Ist D eine Defektgruppe von B und $u_i \notin_G D$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, so hat B keinen Brauer-Korrespondenten in $\mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u_i))$. Denn wäre $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u_i))$ mit $b^G = B$ und $d \in \mathrm{Def}(b)$, so wäre $u_i \in \mathrm{O}_p(\mathrm{C}_G(u_i)) \leq d \leq_G D$. Folglich braucht man in der Summe nur $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $u_i \in_G D$ zu beachten. Um die Formel anzuwenden, benötigt man jedoch Informationen darüber, welche Blöcke $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u_i))$ Brauer-Korrespondenten von B sind. Mit Hilfe von sogenannten B-Elementen (siehe Abschnitt 1.9) kann man sich diese Informationen häufig verschaffen.

Für die Berechnung der verallgemeinerten Zerlegungszahlen eines gegebenen Blocks sind die folgenden Orthogonalitätsrelationen unerlässlich.

Satz 1.17 (Orthogonalitätsrelationen)**.** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d^{u_i}_{\chi\varphi} \overline{d^{u_j}_{\chi\psi}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ c_{\varphi\psi} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

für $\varphi \in \mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(u_i))$ und $\psi \in \mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(u_j))$. Dabei ist $c_{\varphi\psi}$ die entsprechende Cartaninvariante von $F\,\mathrm{C}_G(u_i)$.

In naheliegender Weise kann man auch eine „Blockversion“ dieser Aussage formulieren.

Wir nehmen nun an, dass N ein Normalteiler von G ist. Für jeden Block $b \in \mathrm{Bl}(RN)$ und $g \in G$ ist dann auch ${}^g b := gbg^{-1} \in \mathrm{Bl}(RN)$. Folglich operiert G durch Konjugation auf der Menge der Blöcke von RN. Für einen Block $b \in \mathrm{Bl}(RN)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{T}_G(b)$ den Stabilisator dieser Operation, das heißt

$$\mathrm{T}_G(b) := \{g \in G : {}^g b = b\}.$$

Man nennt $\mathrm{T}_G(b)$ die *Trägheitsgruppe* von b in G. Da b ein Ideal in RN ist, gilt stets $N \le \mathrm{T}_G(b)$. Ist B ein Block von RG mit $Bb \neq 0$, so sagt man: B *überdeckt* b. Dies ist äquivalent zu $ef \neq 0$, falls e das Blockidempotent von B und f das Blockidempotent von b ist. Man kann zeigen, dass jeder Block von RG mindestens einen Block von RN überdeckt und jeder Block von RN von mindestens einem Block von RG überdeckt wird. Darüber hinaus bilden die von $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ überdeckten Blöcke in $\mathrm{Bl}(RN)$ eine Konjugationsklasse bzgl. der obigen Operation. Wie üblich übertragen sich die Begriffe auf die Blöcke von FG. Die Brauer-Korrespondenz liefert ein Beispiel für die Überdeckung von Blöcken. Denn ist $b \in \mathrm{Bl}(RN)$ und $b^G =: B \in \mathrm{Bl}(RG)$ definiert, so wird b von B überdeckt. Der folgende Satz liefert eine Korrespondenz von Blöcken, die b überdecken.

Satz 1.18 (Fong-Reynolds)**.** *Sei $N \trianglelefteq G$ und $b \in \mathrm{Bl}(RN)$. Dann gilt:*

(i) Die Abbildung $\widetilde{b} \mapsto \widetilde{b}^G$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der Blöcke von $R\,\mathrm{T}_G(b)$, die b überdecken, und der Menge der Blöcke von RG, die b überdecken.

(ii) Sei nun $\widetilde{b}$ ein Block von $R\,\mathrm{T}_G(b)$, der b überdeckt. Dann liefert die Induktion von Charakteren eine Bijektion zwischen $\mathrm{Irr}(\widetilde{b})$ und $\mathrm{Irr}\big(\widetilde{b}^G\big)$. Eine analoge Aussage gilt für $\mathrm{IBr}(\widetilde{b})$ und $\mathrm{IBr}\big(\widetilde{b}^G\big)$. Insbesondere ist $k(\widetilde{b}) = k\big(\widetilde{b}^G\big)$ und $l(\widetilde{b}) = l\big(\widetilde{b}^G\big)$.

(iii) Ist $\widetilde{b}$ ein Block von $R\,\mathrm{T}_G(b)$, der b überdeckt, so haben $\widetilde{b}$ und $\widetilde{b}^G$ bei geeigneter Nummerierung die gleiche Cartan- und Zerlegungsmatrix. Für $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(\widetilde{b})$ und $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in \mathrm{IBr}(\widetilde{b})$ gilt genauer

$$c_{\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}} = c_{\mathrm{Ind}^G_{\mathrm{T}_G(b)}(\widetilde{\varphi})\,\mathrm{Ind}^G_{\mathrm{T}_G(b)}(\widetilde{\psi})} \quad \textit{und} \quad d_{\widetilde{\chi}\widetilde{\varphi}} = d_{\mathrm{Ind}^G_{\mathrm{T}_G(b)}(\widetilde{\chi})\,\mathrm{Ind}^G_{\mathrm{T}_G(b)}(\widetilde{\varphi})},$$

wobei c_{ij} bzw. d_{ij} die Einträge der entsprechenden Cartan- bzw. Zerlegungsmatrizen sind.

(iv) Sei $\widetilde{b}$ ein Block von $R\,\mathrm{T}_G(b)$, der b überdeckt, und $D \in \mathrm{Def}(\widetilde{b})$. Dann ist $D \in \mathrm{Def}\big(\widetilde{b}^G\big)$ und $D \cap N \in \mathrm{Def}(b)$.

Betrachten wir noch einmal die Brauer-Korrespondenz. Sei dazu B ein Block von RG mit Defektgruppe D und b sein Brauer-Korrespondent in $\mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(D))$. Wegen $D\,\mathrm{C}_G(D) \trianglelefteq \mathrm{N}_G(D)$ gibt es einen Block $\beta \in \mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$, der von b überdeckt wird. Außerdem ist b der einzige Block von $R\,\mathrm{N}_G(D)$, der β überdeckt. Folglich ist $\beta^{\mathrm{N}_G(D)} = b$ und $\beta^G = B$. Hat man umgekehrt einen beliebigen Block $\beta \in \mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$ mit Defektgruppe δ gegeben, so ist $D \subseteq \mathrm{O}_p(D\,\mathrm{C}_G(D)) \subseteq \delta$. Also ist $\mathrm{C}_G(\delta) \subseteq \mathrm{C}_G(D) \subseteq D\,\mathrm{C}_G(D)$, und nach Satz 1.13 ist β^G definiert. Auf diese Weise kann man Brauers ersten Hauptsatz erweitern.

Satz 1.19. *Sei Q eine p-Untergruppe von G. Dann induziert die Abbildung*

$$\mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q)) \to \mathrm{Bl}(RG), \ \beta \mapsto \beta^G$$

eine Bijektion zwischen der Menge der $\mathrm{N}_G(Q)$-Konjugationsklassen von Blöcken β in $\mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ mit $Q \in \mathrm{Def}(\beta)$ und $p \nmid |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(Q)}(\beta) : Q\,\mathrm{C}_G(Q)|$ und der Menge der Blöcke von RG mit Defektgruppe Q.

In der Situation von Satz 1.19 nennt man die Zahl $t(B) := |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(Q)}(\beta) : Q\,\mathrm{C}_G(Q)|$ den *Trägheitsindex* von $B := \beta^G$. Offenbar ist diese Definition unabhängig von der Wahl von β. Man kann für β sogar einen beliebigen Brauer-Korrespondenten von B in $\mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ wählen. Ist nämlich δ eine Defektgruppe von β, so gilt $Q \subseteq \mathrm{O}_p(Q\,\mathrm{C}_G(Q)) \subseteq \delta \leq_G Q$ und damit $Q = \delta \in \mathrm{Def}(\beta)$. Außerdem gilt $p \nmid |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(Q)}(\beta) : Q\,\mathrm{C}_G(Q)|$.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}(D)$ die Automorphismengruppe einer Gruppe D. Außerdem sei $\mathrm{Inn}(D)$ (bzw. $\mathrm{Out}(D) := \mathrm{Aut}(D)/\,\mathrm{Inn}(D)$) die innere (bzw. äußere) Automorphismengruppe von D. Da $\mathrm{N}_G(D)$ auf D durch Konjugation operiert, existiert ein Homomorphismus $f : \mathrm{N}_G(D) \to \mathrm{Aut}(D)$ mit $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{C}_G(D)$ und $f(D\,\mathrm{C}_G(D)) = \mathrm{Inn}(D)$. Folglich ist $\mathrm{N}_G(D)/D\,\mathrm{C}_G(D)$ zu einer Untergruppe von $\mathrm{Out}(D)$ isomorph. Insbesondere ist $t(B)$ für einen Block $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ mit Defektgruppe D ein Teiler von $|\mathrm{Out}(D)|$. In vielen Fällen kann man zeigen, dass $\mathrm{Out}(D)$ bzw. $\mathrm{Aut}(D)$ eine p-Gruppe ist. Aus $p \nmid t(B)$ folgt dann $t(B) = 1$ für jeden Block B von RG mit Defektgruppe D.

1.7 Blöcke und Faktorgruppen

Nach Brauers erstem Hauptsatz kann man die Blöcke von RG mit Defektgruppe D mit den Blöcken von $R\,\mathrm{N}_G(D)$ oder $RD\,\mathrm{C}_G(D)$ mit Defektgruppe D in Beziehung setzen. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass man diese Beziehung auf Blöcke von gewissen Faktorgruppen ausdehnen kann. Sei dafür zunächst N ein beliebiger Normalteiler von G. Dann gibt es einen kanonischen Epimorphismus von F-Algebren $\tau : FG \to F[G/N]$ mit $\tau(g) = gN$ für $g \in G$. Für jedes Idempotent $e \in FG$ ist sicher auch $\tau(e) \in F[G/N]$ ein Idempotent. Ist e sogar ein Blockidempotent, so ist $\tau(e) \in \mathrm{Z}(F[G/N])$. Für einen Block B von FG mit Blockidempotent e_B existieren daher Blockidempotente $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ von $F[G/N]$ mit

$$\tau(e_B) = \overline{e_1} + \ldots + \overline{e_n}.$$

Man beachte, dass dabei auch $n = 0$ (das heißt $\tau(e_B) = 0$) zugelassen ist. Ist $\overline{B_i} \in \mathrm{Bl}(F[G/N])$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ der Block mit Blockidempotent $\overline{e_i}$, so sagt man: *B dominiert $\overline{B_i}$*. Man zeigt leicht, dass jeder Block von $F[G/N]$ von genau einem Block in $\mathrm{Bl}(FG)$ dominiert wird. Wie üblich überträgt sich der Begriff auf die Blöcke von RG und $R[G/N]$. Der folgende Satz beschreibt eine Situation, in der stets $n = 1$ gilt.

Satz 1.20. *Sei N ein p-Normalteiler von G und $|G : \mathrm{C}_G(N)|$ eine Potenz von p. Jeder Block B von RG dominiert dann genau einen Block $\overline{B}$ von $R[G/N]$, und die Abbildung $B \mapsto \overline{B}$ ist eine Bijektion zwischen $\mathrm{Bl}(RG)$ und $\mathrm{Bl}(R[G/N])$. Außerdem gilt für die Cartanmatrizen $C_B = |N| C_{\overline{B}}$. Insbesondere ist also $l(B) = l(\overline{B})$. Ist D eine Defektgruppe von B, so ist D/N eine Defektgruppe von $\overline{B}$.*

Ersetzt man G durch $Q\,\mathrm{C}_G(Q)$ und N durch Q für eine p-Untergruppe Q von G, so sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Auf diese Weise kann man Brauers ersten Hauptsatz noch einmal erweitern.

Satz 1.21. *Sei Q eine p-Untergruppe von G. Dann existiert eine Bijektion zwischen den Blöcken von RG mit Defektgruppe Q und den $\mathrm{N}_G(Q)/Q$-Konjugationsklassen von Blöcken $\beta \in \mathrm{Bl}(R[Q\,\mathrm{C}_G(Q)/Q])$ mit Defekt 0 und $p \nmid |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(Q)/Q}(\beta) : Q\,\mathrm{C}_G(Q)/Q|$.*

1.8 Verschränkte Gruppenalgebren

Wir beginnen damit, Gruppenalgebren zu verallgemeinern.

Definition 1.22. Eine *verschränkte Gruppenalgebra* von G über F ist eine F-Algebra A mit eindimensionalen F-Untervektorräumen A_g für $g \in G$, sodass $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ und $A_g A_h = A_{gh}$ für $g, h \in G$ gilt.

Das einfachste Beispiel für eine verschränkte Gruppenalgebra von G über F ist $A := FG$, wobei man $A_g := Fg$ für $g \in G$ setzt. Im Folgenden sei A stets eine verschränkte Gruppenalgebra von G über F. Man überlegt sich leicht, dass dann A_1 eine Unteralgebra von A mit $1 \in A_1$ ist. Insbesondere ist $A_1 = F1 \cong F$. Wählt man ein Element $0 \neq x \in A_g$, so folgt, dass x eine Einheit in A ist und $x^{-1} \in A_{g^{-1}}$ gilt. Ist nun $0 \neq x_g \in A_g$ für $g \in G$, so existieren Elemente $\alpha(g, h) \in F^\times$ für $g, h \in G$ mit

$$x_g x_h = \alpha(g, h) x_{gh}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt dann

$$\alpha(g, h)\alpha(gh, k) = \alpha(g, hk)\alpha(h, k) \tag{1.5}$$

für alle $g, h, k \in G$.

Abbildungen $\alpha : G \times G \to F^\times$ mit der Eigenschaft (1.5) nennt man *Faktorensysteme* von G. Die Menge $C^2(G, F^\times)$ aller Abbildungen $G \times G \to F^\times$ bildet offenbar eine abelsche Gruppe, indem man $(\alpha\beta)(g, h) := \alpha(g, h)\beta(g, h)$ für $g, h \in G$ und $\alpha, \beta \in C^2(G, F^\times)$ definiert. Die Menge $Z^2(G, F^\times)$ aller Faktorensysteme von G ist dann eine Untergruppe von $C^2(G, F^\times)$. Analog ist $C^1(G, F^\times)$ die Gruppe aller Abbildungen $G \to F^\times$. Ist $\varphi \in C^1(G, F^\times)$, so kann man sich durch $\partial\varphi(g, h) := \varphi(g)\varphi(h)\varphi(gh)^{-1}$ für $g, h \in G$ ein Faktorensystem $\partial\varphi$ von G verschaffen. Die Abbildung $\partial : C^1(G, F^\times) \to Z^2(G, F^\times)$, $\varphi \mapsto \partial\varphi$ ist dann ein Homomorphismus von Gruppen. Sein Bild $B^2(G, F^\times)$ ist die Menge der *prinzipalen* Faktorensysteme, und die Faktorgruppe $\mathrm{H}^2(G, F^\times) := Z^2(G, F^\times)/B^2(G, F^\times)$ nennt man *zweite Kohomologiegruppe* von G über F.

Sei nun wieder α das oben definierte Faktorensystem der verschränkten Gruppenalgebra A. Man kann dann zeigen, dass das Element $\overline{\alpha} := \alpha B^2(G, F^\times) \in \mathrm{H}^2(G, F^\times)$ nicht von der Wahl der x_g abhängt. Auf diese Weise definiert jede verschränkte Gruppenalgebra von G über F ein eindeutig bestimmtes Element in der zweiten Kohomologiegruppe von G über F. Ist $A = FG$, so erhält man durch $x_g := g$ das triviale Faktorensystem $\alpha(g, h) = 1$ für $g, h \in G$. Hat man umgekehrt eine verschränkte Gruppenalgebra A von G über F mit $\overline{\alpha} = 1$ gegeben, so ist $A \cong FG$.

Wir werden nun sehen, dass verschränkte Gruppenalgebren bei der Untersuchung von Blöcken mit normaler Defektgruppe auftreten. Sei dafür B ein Block von FG mit Defektgruppe $D \trianglelefteq G$. Wir wählen einen Brauer-Korrespondenten $b \in \mathrm{Bl}(FD\,\mathrm{C}_G(D))$ von B. Wegen $p \nmid t(B) = |\mathrm{T}_G(b)/D\,\mathrm{C}_G(D)|$ ist dann $\overline{D} := D\,\mathrm{C}_G(D)/\,\mathrm{C}_G(D)$ eine normale p-Sylowgruppe von $\overline{\mathrm{T}} := \mathrm{T}_G(b)/\,\mathrm{C}_G(D)$. Nach dem Satz von Schur und Zassenhaus existiert ein Komplement $\overline{K}$ von $\overline{D}$ in $\overline{\mathrm{T}}$. Wegen $\overline{K} \subseteq \overline{\mathrm{T}} \subseteq G/\,\mathrm{C}_G(D)$ operiert $\overline{K}$ auf D durch Konjugation, und wir können das semidirekte Produkt L von $\overline{K}$ mit D bzgl. dieser Operation bilden. Külshammer hat in [60] unter diesen Voraussetzungen die Algebrastruktur von B bestimmt.

Satz 1.23 (Külshammer). *Mit den obigen Bezeichnungen ist $B \cong A^{n\times n}$, wobei A eine verschränkte Gruppenalgebra von L über F ist.*

Dieses Ergebnis gilt auch (in entsprechender Form), wenn man B als Block von RG betrachtet. Im Folgenden geben wir einige Eigenschaften der zweiten Kohomologiegruppe an.

Satz 1.24. *Für eine endliche Gruppe G gilt:*

(i) $p \nmid |\mathrm{H}^2(G, F^\times)| < \infty$.

(ii) Für alle $x \in \mathrm{H}^2(G, F^\times)$ gilt $x^{|G|} = 1$.

(iii) Für jede zyklische Gruppe C gilt $\mathrm{H}^2(C, F^\times) = 1$.

(iv) Für $U \leq G$ existiert ein Homomorphismus $f_U : \mathrm{H}^2(G, F^\times) \to \mathrm{H}^2(U, F^\times)$ mit $x^{|G:U|} = 1$ für $x \in \mathrm{Ker}(f_U)$.

Aus Teil (i) und Teil (ii) in Satz 1.24 folgt $\mathrm{H}^2(P, F^\times) = 1$ für jede endliche p-Gruppe P. Sei nun $x \in \mathrm{H}^2(G, F^\times)$. Existiert für jeden Primteiler q von $|G|$ eine q-Sylowgruppe Q mit $f_Q(x) = 1$, so folgt $x = 1$ aus Teil (iv). Insbesondere ist $\mathrm{H}^2(G, F^\times) = 1$, falls die q-Sylowgruppen von G für alle $q \neq p$ zyklisch sind.

1.9 *B*-Elemente und *B*-Unterpaare

In diesem Abschnitt geht es darum, die Formel (1.4) aus Satz 1.16 in eine nützlichere Form zu bringen. Die meisten der hier erwähnten Resultate findet man in [80].

Definition 1.25. Sei B ein Block von RG. Ist $u \in G_p$ und $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u))$ mit $b^G = B$, so nennt man das Paar (u, b) ein *B-Element* von G.

In der englischsprachigen Literatur wird für B-Element häufig der Begriff „(B-)subsection“ benutzt (siehe zum Beispiel [80]). Für $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ ist $(1, B)$ offenbar stets ein B-Element von G. Ist $u \in G_p$ beliebig, so hat jeder Block $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u))$ einen Brauer-Korrespondenten in $\mathrm{Bl}(RG)$. Denn ist d eine Defektgruppe von b, so ist $u \in \mathrm{O}_p(\mathrm{C}_G(u)) \subseteq d$ und $\mathrm{C}_G(d) \subseteq \mathrm{C}_G(u)$. Insbesondere ist (u, b) ein b^G-Element von G. Auf diese Weise sind B-Elemente eine Verallgemeinerung von p-Elementen.

Die Gruppe G operiert durch ${}^g(u, b) := ({}^gu, {}^gb)$ auf der Menge der B-Elemente von G. Dabei ist ${}^gb$ ein Block von $gR\,\mathrm{C}_G(u)g^{-1} = Rg\,\mathrm{C}_G(u)g^{-1} = R\,\mathrm{C}_G(gug^{-1}) = R\,\mathrm{C}_G({}^gu)$ mit ${}^gu := gug^{-1}$. Außerdem ist $({}^gb)^G = {}^g(b^G) = {}^gB = B$. Wählt man ein Repräsentantensystem $\mathcal{R}$ für die Bahnen dieser Operation, so kann man die Gleichung (1.4) in der Form

$$k(B) = \sum_{(u,b)\in\mathcal{R}} l(b) \tag{1.6}$$

schreiben. Wir werden ein solches Repräsentantensystem näher bestimmen.

So, wie B-Elemente eine Verallgemeinerung von p-Elementen sind, kann man analog versuchen, p-Untergruppen zu verallgemeinern.

Definition 1.26. Ist P eine p-Untergruppe von G und b ein Block von $RP\,\mathrm{C}_G(P)$, so nennt man das Paar (P,b) ein *Unterpaar* von G. Ist zusätzlich $b^G = B \in \mathrm{Bl}(RG)$, so spricht man auch von *B-Unterpaaren*. Hat b Defektgruppe P, so sagt man: (P,b) ist ein *(B-)Brauerpaar* von G. Ist eine Defektgruppe von b auch eine Defektgruppe von $B = b^G$, so ist (P,b) ein *(B-)Hauptpaar* von G.

Die entsprechenden englischen Begriffe sind „(B-)subpair", „(B-)Brauer subpair" und „major (B-)subpair" (siehe zum Beispiel [80]). In manchen Artikeln definiert man Unterpaare (P,b) von G mit $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P))$ (zum Beispiel in [5]). Dies ist aber kein wesentlicher Unterschied. Denn hat man einen Block $\beta \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P))$, so ist $\beta^{P\,\mathrm{C}_G(P)}$ der eindeutig bestimmte Block von $RP\,\mathrm{C}_G(P)$, der β überdeckt. Somit erhält man eine Bijektion zwischen den Blöcken von $R\,\mathrm{C}_G(P)$ und $RP\,\mathrm{C}_G(P)$. Ist b ein beliebiger Block von $RP\,\mathrm{C}_G(P)$ für eine p-Untergruppe P und $d \in \mathrm{Def}(b)$, so ist $P \subseteq \mathrm{O}_p(P\,\mathrm{C}_G(P)) \subseteq d$ und damit $\mathrm{C}_G(d) \subseteq \mathrm{C}_G(P) \subseteq P\,\mathrm{C}_G(P)$. Folglich ist b^G stets definiert, und (P,b) ist ein b^G-Unterpaar von G.

Ist (u,b) ein B-Element von G, so ist $(\langle u\rangle, b)$ wegen $\mathrm{C}_G(u) = \langle u\rangle\,\mathrm{C}_G(\langle u\rangle)$ ein B-Unterpaar von G. Somit sind B-Unterpaare auch eine Verallgemeinerung von B-Elementen. Oft kann man mit Unterpaaren besser arbeiten als mit B-Elementen. Wir werden uns daher zunächst auf Unterpaare konzentrieren.

Analog zur Inklusionsrelation auf der Menge der Untergruppen von G definieren wir eine partielle Ordnungsrelation auf der Menge aller Unterpaare von G.

Definition 1.27. Für zwei Unterpaare (P,b_P) und (Q,b_Q) von G schreiben wir $(P,b_P) \trianglelefteq (Q,b_Q)$, falls $P \trianglelefteq Q$ und $b_P^{Q\,\mathrm{C}_G(P)} = b_Q^{Q\,\mathrm{C}_G(P)}$ gilt. Außerdem schreiben wir $(P,b_P) \le (Q,b_Q)$, falls eine Folge von Unterpaaren $(P,b_P) = (P_1,b_1),(P_2,b_2),\ldots,(P_n,b_n) = (Q,b_Q)$ von G mit $(P_i,b_i) \trianglelefteq (P_{i+1},b_{i+1})$ für $i = 1,\ldots,n-1$ existiert.

Man überlegt sich leicht, dass $\le$ tatsächlich eine Ordnungsrelation auf der Menge aller Unterpaare von G ist. Ist (P,b_P) ein B-Unterpaar von G und $(P,b_P) \le (Q,b_Q)$ oder $(Q,b_Q) \le (P,b_P)$ für ein beliebiges Unterpaar (Q,b_Q) von G, so folgt aus der Transitivität der Brauer-Korrespondenz, dass auch (Q,b_Q) ein B-Unterpaar von G ist. Hat man ein B-Element (u,b) von G und ein (B-)Unterpaar (P,b_P) von G mit $(\langle u\rangle,b) \le (P,b_P)$, so schreibt man häufig $(u,b) \in (P,b_P)$.

Wie bei den B-Elementen operiert G durch ${}^g(P,b) := ({}^gP, {}^gb)$ für ein Unterpaar (P,b) und $g \in G$ auf der Menge der Unterpaare von G. Wie üblich ist dabei ${}^gP := gPg^{-1}$ eine p-Untergruppe und ${}^gb$ ein Block von ${}^gRP\,\mathrm{C}_G(P) = R\,{}^gP\,{}^g\mathrm{C}_G(P) = R\,{}^gP\,\mathrm{C}_G({}^gP)$. Ist (P,b) ein B-Unterpaar von G, so ist wegen $({}^gb)^G = {}^g(b^G) = b^G$ auch ${}^g(P,b)$ ein B-Unterpaar von G. Folglich operiert G auch auf der Menge der B-Unterpaare von G. Es ist leicht zu sehen, dass diese Operation die Relation $\le$ erhält, das heißt, aus $(P,b_P) \le (Q,b_Q)$ folgt ${}^g(P,b_P) \le {}^g(Q,b_Q)$ für $g \in G$. Der Stabilisator eines Unterpaars (P,b) unter dieser Operation ist gerade $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(P)}(b)$. Ist B_0 der Hauptblock von RG und (P,b) ein B_0-Unterpaar von G, so ist nach Brauers dritten Hauptsatz b der Hauptblock von $P\,\mathrm{C}_G(P)$. Dies zeigt $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(P)}(b) = \mathrm{N}_G(P)$.

Definition 1.28. Ein Block B von RG heißt *nilpotent*, falls $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(P)}(b)/\,\mathrm{C}_G(P)$ für jedes B-Unterpaar (P,b) von G eine p-Gruppe ist.

Ist B_0 der Hauptblock von RG, so erhält man mit obiger Bemerkung, dass B_0 genau dann nilpotent ist, falls $\mathrm{N}_G(P)/\mathrm{C}_G(P)$ für jede p-Untergruppe P von G selbst eine p-Gruppe ist. Nach einem bekannten Satz von Frobenius ist dies äquivalent dazu, dass G *p-nilpotent* ist, das heißt, $G/\mathrm{O}_{p'}(G)$ ist eine p-Gruppe. Umgekehrt ist jeder Block einer p-nilpotenten Gruppe nilpotent. Andere Beispiele für nilpotente Blöcke sind die in Brauers erstem Hauptsatz auftretenden Blöcke $b \in \mathrm{Bl}(D\,\mathrm{C}_G(D))$ mit Defektgruppe D. Puig hat in [82] die Algebrastruktur von nilpotenten Blöcken bestimmt.

Satz 1.29 (Puig)**.** *Sei B ein nilpotenter Block von RG mit Defektgruppe D. Dann ist*

$$B \cong (RD)^{n\times n}.$$

Mit diesem Satz kann man die wichtigsten Invarianten eines nilpotenten Blocks B mittels D ausdrücken. So ist $k(B) = |\mathrm{Cl}(D)|$ die Anzahl der Konjugationsklassen von D und $l(B) = 1$ die Anzahl der p-regulären Konjugationsklassen von D. Außerdem übertragen sich auch die Höhen der irreduziblen Charaktere von B auf die Grade der irreduziblen Charaktere von D, sodass $k_i(B)$ gerade die Anzahl der irreduziblen Charaktere vom Grad p^i in D ist. Insbesondere ist $k_0(B) = |D : D'|$, wobei D' wie üblich die Kommutatorgruppe von D bezeichnet. Ist die Defektgruppe eines Blocks B abelsch, so ist B genau dann nilpotent, falls $t(B) = 1$ gilt. Für den Hauptblock ist dies genau Burnsides Verlagerungssatz.

Wir geben nun einige Sätze über Unterpaare an. Der erste Teil im folgenden Lemma rechtfertigt das Zeichen $\trianglelefteq$ für Unterpaare.

Lemma 1.30.

(i) Sind (P, b_P) und (Q, b_Q) Unterpaare von G mit $(Q, b_Q) \le (P, b_P)$ und $Q \trianglelefteq P$, so ist $(Q, b_Q) \trianglelefteq (P, b_P)$.

(ii) Sei (P, b_P) ein Unterpaar von G und $Q \le P$ (bzw. $Q \trianglelefteq P$). Dann existiert genau ein Block $b_Q \in \mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ mit $(Q, b_Q) \le (P, b_P)$ (bzw. $(Q, b_Q) \trianglelefteq (P, b_P)$).

(iii) Seien (P, b_P) und (Q, b_Q) Unterpaare von G mit $(Q, b_Q) \le (P, b_P)$ und S eine Untergruppe von G mit $Q \le S \le P$. Dann existiert genau ein Block $b_S \in \mathrm{Bl}(RS\,\mathrm{C}_G(S))$ mit $(Q, b_Q) \le (S, b_S) \le (P, b_P)$.

(iv) Ist (Q, b_Q) ein Brauerpaar und (P, b_P) ein Unterpaar von G mit $(Q, b_Q) \le (P, b_P)$, so ist auch (P, b_P) ein Brauerpaar und $\mathrm{C}_P(Q) \subseteq Q$. Ist sogar $(Q, b_Q) \trianglelefteq (P, b_P)$, so hat $b_P^{P\,\mathrm{C}_G(Q)}$ Defektgruppe P.

(v) Ein Block $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ hat genau dann eine abelsche Defektgruppe, falls jedes B-Unterpaar von G ein Hauptpaar ist.

Definition 1.31. Ein (B-)Unterpaar (P, b) heißt *(B-)Sylowpaar* von G, falls (P, b) maximal bzgl. der Relation $\le$ ist.

Nach Definition ist jedes (B-)Unterpaar in einem (B-)Sylowpaar von G enthalten (bzgl. der Relation $\le$). Ist (P, b) ein $B_0(RG)$-Sylowpaar von G, so ist $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ nach früheren Bemerkungen. Dies erklärt den Begriff „Sylowpaar“.

Satz 1.32.

(i) Sei $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ und (P, b) ein B-Unterpaar von G. Genau dann ist (P, b) ein B-Sylowpaar, wenn P eine Defektgruppe von B ist. Insbesondere ist jedes (B-)Sylowpaar ein (B-)Brauerpaar.

(ii) Sei (P, b_P) ein B-Sylowpaar von G. Dann ist jedes B-Unterpaar von G zu einem Unterpaar (Q, b_Q) mit $(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ konjugiert. Insbesondere sind je zwei B-Sylowpaare von G konjugiert.

Betrachtet man für B den Hauptblock von RG, so liefert Teil (ii) im Satz 1.32 einige Teile der Sylow-Sätze aus der Gruppentheorie.

Definition 1.33. Sei (P, b_P) ein Unterpaar von G.

(i) Ein b_P-Sylowpaar (Q, b_Q) von $P\,\mathrm{C}_G(P)$ mit $(P, b_P) \leq (Q, b_Q)$ heißt *Zentralisatorpaar* von (P, b_P).

(ii) Ein $b_P^{\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(P)}(b_P)}$-Sylowpaar (Q, b_Q) von $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(P)}(b_P)$ mit $(P, b_P) \leq (Q, b_Q)$ heißt *Normalisatorpaar* von (P, b_P).

Wegen $P \subseteq Q$ in Definition 1.33 ist $\mathrm{C}_G(Q) \subseteq P\,\mathrm{C}_G(P) \subseteq \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(P)}(b_P)$. Daher ist $b_Q \in \mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_{P\,\mathrm{C}_G(P)}(Q)) = \mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ in Teil (i) bzw. $b_Q \in \mathrm{Bl}\big(RQ\,\mathrm{C}_{\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(P)}(b_P)}(Q)\big) = \mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ in Teil (ii). Dies zeigt, dass Zentralisator- und Normalisatorpaare von (P, b_P) auch Unterpaare von G sind. Mit ihnen kann man eine alternative Charakterisierung der Begriffe Brauer- und Sylowpaar angeben.

Lemma 1.34.

(i) Genau dann ist (P, b) ein Brauerpaar von G, falls (P, b) ein Zentralisatorpaar von sich selbst ist.

(ii) Genau dann ist (P, b) ein Sylowpaar von G, falls (P, b) ein Normalisatorpaar von sich selbst ist.

Wir führen nun eine weitere Relation auf der Menge der Unterpaare ein. Sei dafür im Folgenden $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ und (P, b_P) ein fest gewähltes B-Sylowpaar von G.

Definition 1.35. Für $Q \leq P$ sei b_Q der nach Lemma 1.30(ii) eindeutig bestimmte Block von $RQ\,\mathrm{C}_G(Q)$ mit $(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$. Wir schreiben $(Q, b_Q) \leq_n (P, b_P)$, falls eine Folge von Unterpaaren $(Q, b_Q) = (Q_1, b_1), (Q_2, b_2), \ldots, (Q_k, b_k) = (P, b_P)$ von G existiert, sodass (Q_{i+1}, b_{i+1}) für $i = 1, \ldots, k-1$ ein Normalisatorpaar von (Q_i, b_i) ist. Wir definieren außerdem

$$\mathrm{A}(P, b_P) := \big\{Q \leq P : (Q, b_Q) \text{ ist ein Brauerpaar}\big\},$$
$$\mathrm{A}_0(P, b_P) := \big\{Q \in \mathrm{A}(P, b_P) : (Q, b_Q) \leq_n (P, b_P)\big\}.$$

Man beachte, dass diese Definition von $\mathrm{A}(P, b_P)$ und $\mathrm{A}_0(P, b_P)$ aus [80] zu Brauers Definition in [20] äquivalent ist (siehe [80] Abschnitt 3).

Lemma 1.36.

(i) Ist $Q \in \mathrm{A}(P, b_P)$ und $Q \leq S \leq P$, so folgt $S \in \mathrm{A}(P, b_P)$ und $\mathrm{C}_P(Q) \subseteq Q$.

(ii) Ist $Q \leq P$ und $(Q, b_Q) \leq_n (P, b_P)$, so folgt $\mathrm{N}_P(Q) \in \mathrm{A}_0(P, b_P)$.

Sei nun $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von Elementen in $\mathrm{A}_0(P, b_P)$. Für jedes $S \in \mathcal{R}$ sei b_S der eindeutig bestimmte Block von $RS\,\mathrm{C}_G(S)$ mit $(S, b_S) \leq (P, b_P)$. Man kann dann zeigen, dass jedes Brauerpaar (Q, b_Q) von G zu genau einem Unterpaar (S, b_S) mit $S \in \mathcal{R}$ konjugiert ist.

Satz 1.37. *Sei (Q, b_Q) ein B-Unterpaar von G. Dann existiert ein Unterpaar (U, b_U) und ein eindeutig bestimmtes $S \in \mathcal{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $(U, b_U) \leq (P, b_P)$,

(ii) (Q, b_Q) *ist zu* (U, b_U) *konjugiert,*

(iii) (S, b_S) *ist ein Zentralisatorpaar von* (U, b_U).

In der Situation von Satz 1.37 sagt man: (Q, b_Q) hat *Typ S*.

Satz 1.38 (Olsson)**.** *Für $S \in \mathcal{R}$ sei $\mathcal{S}_S$ ein Repräsentantensystem für die $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(S)}(b_S)$-Konjugationsklassen von Untergruppen $U \leq S$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $S = U\,\mathrm{C}_S(U)$,

(ii) $p \nmid |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(S)}(b_S) \cap U\,\mathrm{C}_G(U) : S\,\mathrm{C}_G(S)|$.

Dann ist

$$\mathcal{T}_S := \{(U, b_U) : U \in \mathcal{S}_S\}$$

ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von B-Unterpaaren vom Typ S.

Mit den Bezeichnungen aus diesem Satz ist dann $\mathcal{T} := \dot{\bigcup}_{S\in\mathcal{R}} \mathcal{T}_S$ ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von B-Unterpaaren. Nach Satz 1.32(ii) kommt es dabei nicht auf die Wahl des B-Sylowpaars (P, b_P) an. Da unser eigentliches Interesse den G-Konjugationsklassen von B-Elementen galt, geben wir jetzt das analoge Resultat aus [20] für B-Elemente an.

Satz 1.39 (Brauer)**.** *Für $S \in \mathcal{R}$ sei $\mathcal{S}_S$ ein Repräsentantensystem für die $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(S)}(b_S)$-Konjugationsklassen von Elementen $u \in \mathrm{Z}(S)$ mit der Eigenschaft*

$$p \nmid |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(S)}(b_S) \cap \mathrm{C}_G(u) : S\,\mathrm{C}_G(S)|.$$

Dann ist

$$\mathcal{T} := \left\{\left(u_S, b_S^{\mathrm{C}_G(u_S)}\right) : S \in \mathcal{R},\ u_S \in \mathcal{S}_S\right\}$$

ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von B-Elementen. Dabei hat $b_S^{\mathrm{C}_G(u_S)}$ Defektgruppe S.

Da die Formulierung von Satz 1.39 nicht exakt mit der Formulierung in [20] übereinstimmt, wollen wir kurz den Beweis skizzieren.

Beweis. Wie bereits erwähnt wurde, stimmt unsere Definition der Mengen $\mathrm{A}(P, b_P)$ und $\mathrm{A}_0(P, b_P)$ mit der in [20] überein. Sei nun $D \in \mathrm{Def}(B)$ und b_D ein Brauer-Korrespondent von B in $\mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$. Nach Satz 1.32(i) ist dann (D, b_D) ein B-Sylowpaar von G. Da es nach Satz 1.32(ii) nicht auf die Wahl des B-Sylowpaars (P, b_P) ankommt, können wir also (wie in [20]) o. B. d. A. $(P, b_P) = (D, b_D)$ voraussetzen. Satz 1.32(i) zeigt auch, dass die in [20] definierten „primitiven" Unterpaare genau mit unseren Sylowpaaren übereinstimmen. Damit folgt aus (5C) in [20], dass unsere Menge $\mathcal{R}$ auch ein Repräsentantensystem für die sogenannten „strong conjugacy classes" von Elementen in $\mathrm{A}(D, b_D)$ ist. Somit impliziert (6C) in [20] die Behauptung über $\mathcal{T}$. Der Beweis von (6F) in [20] zeigt schließlich auch, dass $b_S^{\mathrm{C}_G(u_S)}$ Defektgruppe S hat. □

Wir werden nun die Repräsentantensysteme für B-Unterpaare bzw. B-Elemente für den Fall, dass die Defektgruppen von B abelsch sind, explizit ausrechnen. Sei also B ein Block von RG und $D \in \operatorname{Def}(B)$ abelsch. Wie im Beweis von Satz 1.39 kann man $(P, b_P) = (D, b_D)$ als B-Sylowpaar von G wählen, falls b_D ein Brauer-Korrespondent von B in $\operatorname{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$ ist. Betrachten wir nun $\mathrm{A}(D, b_D)$. Offenbar ist $D \in \mathrm{A}(D, b_D)$. Nehmen wir nun an, dass ein $H < D$ mit $H \in \mathrm{A}(D, b_D)$ existiert. Nach Lemma 1.36(i) erhalten wir dann den Widerspruch $D = \mathrm{C}_D(H) \subseteq H$, da D abelsch ist. Folglich ist $\mathrm{A}(D, b_D) = \{D\}$. Lemma 1.36(ii) impliziert nun

$$\mathcal{R} = \mathrm{A}_0(D, b_D) = \mathrm{A}(D, b_D) = \{D\}.$$

Für jede Untergruppe $U \le D$ sind offenbar die beiden Eigenschaften in Satz 1.38 erfüllt. Ist also $\mathcal{S} := \mathcal{S}_D$ ein Repräsentantensystem für die $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(D)}(b_D)$-Konjugationsklassen von Untergruppen $U \le D$, so ist

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_D = \big\{(U, b_U) : U \in \mathcal{S}\big\}$$

ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von B-Unterpaaren.

Ist analog $\mathcal{S} := \mathcal{S}_D$ ein Repräsentantensystem für die $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(D)}(b_D)$-Konjugationsklassen von Elementen $u \in \mathrm{Z}(D) = D$, so ist

$$\mathcal{T} := \Big\{\big(u, b_D^{\mathrm{C}_G(u)}\big) : u \in \mathcal{S}\Big\}$$

ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von B-Elementen.

1.10 Morita-Äquivalenz

Obwohl die meisten Aussagen in diesem Abschnitt für beliebige Algebren gelten, wollen wir annehmen, dass A und B stets Gruppenalgebren oder Blöcke über F oder R sind. Für einen A-Rechtsmodul M und einen A-Linksmodul N bezeichnen wir mit $M \otimes_A N$ das Tensorprodukt von M und N.

Definition 1.40. Ein *Morita-Kontext* ist ein 6-Tupel (A, B, M, N, Φ, Ψ), wobei M ein B-A-Bimodul, N ein A-B-Bimodul, $\Phi : M \otimes_A N \to B$ ein B-B-Homomorphismus und $\Psi : N \otimes_B M \to A$ ein A-A-Homomorphismus mit

$$\Phi(m \otimes n)m' = m\Psi(n \otimes m') \quad \text{und} \quad n\Phi(m \otimes n') = \Psi(n \otimes m)n'$$

für $m, m' \in M$ und $n, n' \in N$ ist.

Ist Φ oder Ψ in dieser Definition surjektiv, so ist Φ bzw. Ψ sogar eine Bijektion.

Definition 1.41. Ist (A, B, M, N, Φ, Ψ) ein Morita-Kontext und sind Φ und Ψ surjektiv, so sagt man: A und B sind *Morita-äquivalent*.

Die Morita-Äquivalenz von Algebren ist eine Äquivalenzrelation. Sind A und B Morita-äquivalent, so induzieren die Abbildungen $P \mapsto M \otimes_A P$ und $Q \mapsto N \otimes_B Q$ zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Isomorphieklassen von A-Linksmoduln und der Menge der Isomorphieklassen von B-Linksmoduln. Diese Bijektionen erhalten auch die wichtigsten Eigenschaften der Moduln. Daher haben Morita-äquivalente Algebren im Wesentlichen die gleiche Modul- und Darstellungstheorie. Zum Beispiel ist die Anzahl einfacher A-Moduln gleich der Anzahl einfacher B-Moduln. Wir geben einige weitere Eigenschaften an.

Satz 1.42.

(i) *Sind A und B Morita-äquivalent, so ist* $\mathrm{Z}(A) \cong \mathrm{Z}(B)$.

(ii) *Sind A und B Morita-äquivalent und ist C_A (bzw. C_B) die Cartanmatrix von A (bzw. B), so gilt $C_A = C_B$ bei geeigneter Anordnung.*

(iii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist A Morita-äquivalent zu $A^{n\times n}$.*

(iv) *Sind A und B isomorph, so sind A und B auch Morita-äquivalent.*

Im Allgemeinen müssen zwei Morita-äquivalente Algebren allerdings nicht isomorph sein. Somit ist Morita-Äquivalenz eine Verallgemeinerung von Isomorphie. Sind A und B Morita-äquivalent, so ist nach obiger Bemerkung $|\mathrm{IBr}(A)| = |\mathrm{IBr}(B)|$. Aus Teil (i) in Satz 1.42 folgt außerdem auch $|\mathrm{Irr}(A)| = \dim_F \mathrm{Z}(A) = \dim_F \mathrm{Z}(B) = |\mathrm{Irr}(B)|$.

Ist $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ zum Beispiel ein nilpotenter Block mit Defektgruppe D, so zeigen die Sätze 1.29 und 1.42(iii), dass B und RD Morita-äquivalent sind.

1.11 Untere Defektgruppen

Wir geben in diesem Abschnitt einige Resultate über sogenannte untere Defektgruppen an. Alle Definitionen und Ergebnisse findet man in [78]. Man beachte dabei, dass in [78] Blöcke anders als bei uns definiert werden. Genauer gesagt betrachtet man dort für ein Blockidempotent e die Algebra $\mathrm{Z}(FG)e = \mathrm{Z}(FGe)$ als „Block“. Mit dieser Bezeichnung ist dann $k(B) = \dim_F B$ für einen „Block“ B von FG. Wir werden jedoch unsere Definition von Blöcken beibehalten, und die Definitionen und Sätze in [78] entsprechend anpassen. Dabei benutzen wir $\mathrm{Z}(B) = B \cap \mathrm{Z}(FG)$ für $B \in \mathrm{Bl}(FG)$.

Definition 1.43. Für eine p-Untergruppe P von G definieren wir

$$\mathrm{I}_{<P}(FG) := \sum_{Q<P} \mathrm{I}_Q(FG),$$

wobei $\mathrm{I}_Q(FG)$ wie in Definition 1.4 gegeben ist. Sei nun B ein Block von FG. Dann heißt

$$\begin{aligned} m_B(P) &:= \dim_F(B \cap \mathrm{I}_P(FG)) - \dim_F(B \cap \mathrm{I}_{<P}(FG)) \\ &= \dim_F(\mathrm{Z}(B) \cap \mathrm{I}_P(FG)) - \dim_F(\mathrm{Z}(B) \cap \mathrm{I}_{<P}(FG)) \end{aligned}$$

die *Vielfachheit von P als untere Defektgruppe von B*. Wegen $\mathrm{I}_{<P}(FG) \subseteq \mathrm{I}_P(FG)$ ist $m_B(P) \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $m_B(P) > 0$ nennt man P eine *untere Defektgruppe von B*.

Offenbar ändert sich die Vielfachheit $m_B(P)$ nicht, wenn man P durch eine konjugierte Untergruppe ersetzt. Sei e das Blockidempotent von $B \in \mathrm{Bl}(FG)$. Aus der Definition einer Defektgruppe folgt dann $e \in \mathrm{I}_D(FG) \setminus \mathrm{I}_{<D}(FG)$ für $D \in \mathrm{Def}(B)$. Dies zeigt, dass jede Defektgruppe von B auch eine untere Defektgruppe von B ist. Umgekehrt kann man zeigen, dass jede untere Defektgruppe von B in einer Defektgruppe enthalten ist. Wie üblich übertragen sich die Begriffe auf die Blöcke von RG.

Sei $\mathcal{P}(G)$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von p-Untergruppen von G. Dann gilt

$$k(B) = \sum_{P\in\mathcal{P}(G)} m_B(P).$$

Ist D eine Defektgruppe von B, so kann man in dieser Summe nach obiger Bemerkung stets $P \leq D$ für $P \in \mathcal{P}(G)$ annehmen. Der nächste Satz zeigt, dass man die Zahlen $m_B(P)$ oft lokal bestimmen kann.

Satz 1.44. *Sei B ein Block von RG und P eine p-Untergruppe von G. Dann ist*

$$m_B(P) = \sum_{\substack{b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(P)),\\ b^G = B}} m_b(P).$$

Wir verfeinern nun die Definition von $m_B(P)$. Sei dazu u ein p-Element von G. Dann ist die *p-Sektion* S von u die Menge aller Elemente aus G, deren p-Faktor zu u konjugiert ist. Offenbar ist S eine Vereinigung von Konjugationsklassen von G, und wir setzen

$$\mathcal{S}(u) := F\{L^+ : L \in \mathrm{Cl}(G),\ L \subseteq S\} \subseteq \mathrm{Z}(FG).$$

Definition 1.45. Sei B ein Block von FG, $P \leq G$ eine p-Untergruppe und $u \in G$ ein p-Element von G. Wir definieren

$$m_B^u(P) := \dim_F(B \cap I_P(FG) \cap \mathcal{S}(u)) - \dim_F(B \cap I_{<P}(FG) \cap \mathcal{S}(u)).$$

Man nennt $m_B^u(P) \in \mathbb{N}_0$ die *u-Vielfachheit* von P als untere Defektgruppe von B.

Ist $v \in G$ zu u konjugiert und $Q \leq G$ zu P konjugiert, so ist offenbar $\mathcal{S}(u) = \mathcal{S}(v)$ und $m_B^u(P) = m_B^v(Q)$. Wie üblich definiert man $m_B^u(P)$ für einen Block B von RG. Der nächste Satz beschreibt die Beziehung zwischen den Zahlen $m_B(P)$ und $m_B^u(P)$.

Satz 1.46. *Sei B ein Block von FG, $P \leq G$ eine p-Untergruppe, $u \in G$ ein p-Element und $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem für die p-Konjugationsklassen von G. Dann gilt:*

(i) $\sum_{v \in \mathcal{R}} m_B^v(P) = m_B(P)$.

(ii) $\sum_{Q \in \mathcal{P}(G)} m_B^u(Q) = \dim_F(B \cap \mathcal{S}(u))$.

(iii) Die Vielfachheit von $|P|$ als Elementarteiler der Cartanmatrix von B ist

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}(G),\\ |Q| = |P|}} m_B^1(Q).$$

Insbesondere ist $\sum_{Q \in \mathcal{P}(G)} m_B^1(Q) = l(B)$.

Ist $m_B^u(P) \neq 0$, so ist u zu einem Element in $\mathrm{Z}(P)$ konjugiert. Folglich kann man in Satz 1.46(i) stets $v \in \mathrm{Z}(P)$ für $v \in \mathcal{R}$ annehmen.

Abschließend sehen wir, dass man auch die Zahlen $m_B^1(P)$ lokal bestimmen kann.

Satz 1.47. *Sei B ein Block von RG und $P \leq G$ eine p-Untergruppe von G. Dann ist*

$$m_B^1(P) = \sum_{\substack{b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(P)),\\ b^G = B}} m_b^1(P).$$

1.12 Metazyklische 2-Gruppen

Eine Gruppe heißt *metazyklisch*, wenn sie einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe besitzt. Man rechnet leicht nach, dass sich diese Eigenschaft auf Untergruppen und Faktorgruppen überträgt. Da sich die vorliegende Arbeit größtenteils mit 2-Blöcken beschäftigt, werden wir uns in diesem Abschnitt auch nur auf metazyklische 2-Gruppen konzentrieren.

Jede metazyklische 2-Gruppe P der Ordnung 2^n hat die Form

$$P = \langle x, y \mid x^{2^k} = 1,\ y^{2^l} = x^{2^m},\ yxy^{-1} = x^q \rangle, \tag{1.7}$$

wobei $k + l = n$, $q^{2^l} \equiv 1 \pmod{2^k}$ und $2^k \mid 2^m(q-1)$ gilt. Die Relation $2^k \mid 2^m(q-1)$ folgt dabei aus $xyx^{-1} = x^{1-q}y$. Mit C_r bezeichnen wir im Folgenden stets eine zyklische Gruppe der Ordnung $r \in \mathbb{N}$. Ist n gerade, so sind die abelschen metazyklischen Gruppen der Ordnung 2^n durch $C_{2^n}, C_{2^{n-1}} \times C_2, \ldots, C_{2^{n/2}} \times C_{2^{n/2}}$ gegeben. Analog sind $C_{2^n}, C_{2^{n-1}} \times C_2, \ldots, C_{2^{(n+1)/2}} \times C_{2^{(n-1)/2}}$ die Gruppen von diesem Typ, falls n ungerade ist. Ist P nichtabelsch, so kann man zumindest alle P mit einer zyklischen Untergruppe vom Index 2 angeben. Diese sind die *Diedergruppe*

$$D_{2^n} := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

für $n \geq 3$, die *Quaternionengruppe*

$$Q_{2^n} := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1,\ y^2 = x^{2^{n-2}},\ yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

für $n \geq 3$, die *Semidiedergruppe*

$$SD_{2^n} := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{2^{n-2}-1} \rangle$$

für $n \geq 4$ und die *modulare* 2-*Gruppe*

$$M_{2^n} := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{2^{n-2}+1} \rangle$$

für $n \geq 4$. Darüber hinaus hat Liedahl in [66] alle metazyklischen 2-Gruppen durch Angabe der Parameter k, l, m, q in der Darstellung (1.7) klassifiziert. Ähnliche Ergebnisse findet man in [8, 39, 54, 104]. Die Anzahl der metazyklischen 2-Gruppen der Ordnung 2^n hat die Größenordnung n^3.

Eine 2-Gruppe P der Ordnung 2^n mit $n \geq 3$ hat *maximale Klasse*, falls die Nilpotenzklasse von P genau $n-1$ beträgt. Man kann zeigen, dass die 2-Gruppen maximaler Klasse genau die Diedergruppen, Quaternionengruppen und Semidiedergruppen sind.

Da sich eine nichtzyklische, metazyklische 2-Gruppe P durch zwei (und nicht weniger) Elemente erzeugen lässt, gilt $|P/\Phi(P)| = 4$, wobei $\Phi(P)$ die Frattinigruppe von P ist. Hat man nun einen nichttrivialen Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(P)$ mit ungerader Ordnung, so operiert α bekanntlich auch nichttrivial auf $P/\Phi(P)$. Da $\mathrm{Aut}(P/\Phi(P)) \cong \mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$ zur symmetrischen Gruppe S_3 vom Grad 3 isomorph ist, hat α dann die Ordnung 3. Später werden wir sehen, dass diese Möglichkeit nur selten eintritt. Das Argument funktioniert offensichtlich für alle 2-Gruppen, die sich aus zwei Elementen erzeugen lassen.

1.13 Fusionssysteme

Die Struktur einer endlichen Gruppe G wird im Wesentlichen von der Struktur ihrer p-Sylowgruppen und der Art und Weise, wie diese in G eingebettet sind, bestimmt. In ähnlicher Weise ist die Struktur eines Blocks $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ durch die Struktur seiner Defektgruppen und die Art und Weise, wie diese in G eingebettet sind, festgelegt. Mit Hilfe von Fusionssystemen kann man beide Konzepte vereinheitlichen, und allgemeinere Aussagen formulieren. Wir werden in diesem Abschnitt die Definitionen und Resultate aus [67] einführen.

Definition 1.48. Eine *Kategorie auf einer endlichen p-Gruppe P* ist eine Kategorie $\mathcal{F}$, deren Objekte die Untergruppen von P sind, und deren Morphismen folgende Eigenschaften haben:

(i) Alle Morphismen sind injektive Gruppenhomomorphismen.

(ii) Ist $S \le T \le P$, so ist die Inklusionsabbildung $S \hookrightarrow T$ ein Morphismus in $\mathcal{F}$.

(iii) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,T)$, wobei $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,T)$ die Menge der Morphismen $S \to T$ in $\mathcal{F}$ bezeichnet, so sind auch der Isomorphismus $S \to \varphi(S)$, $x \mapsto \varphi(x)$ und seine Umkehrabbildung Morphismen in $\mathcal{F}$.

(iv) Die Komposition der Morphismen in $\mathcal{F}$ ist die gewöhnliche Komposition von Gruppenhomomorphismen.

Hat man eine Kategorie $\mathcal{F}$ auf einer endlichen p-Gruppe P gegeben, so ist $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,S)$ für $S \le P$ offenbar eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(S)$. Man nennt eine Untergruppe $S \le P$ *vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert*, falls $|\mathrm{N}_P(T)| \le |\mathrm{N}_P(S)|$ für jeden Isomorphismus $S \cong T$ in $\mathcal{F}$ gilt. Für jeden Morphismus $\varphi : S \to P$ in $\mathcal{F}$ setzen wir

$$\mathrm{N}_\varphi := \{y \in \mathrm{N}_P(S) : \exists z \in \mathrm{N}_P(\varphi(S)) : \varphi({}^y x) = {}^z\varphi(x)\ \forall x \in S\}.$$

Man überlegt sich leicht, dass stets $S\,\mathrm{C}_P(S) \subseteq \mathrm{N}_\varphi \subseteq \mathrm{N}_P(S)$ gilt.

Definition 1.49. Ein *Fusionssystem auf einer endlichen p-Gruppe P* ist eine Kategorie $\mathcal{F}$ auf P mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für $S, T \le P$ gilt

$$\mathrm{Hom}_P(S,T) := \{\varphi : S \to T : \exists y \in P : \varphi(x) = {}^y x\ \forall x \in S\} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,T).$$

(ii) Es gilt $\mathrm{Aut}_P(P) := \mathrm{Hom}_P(P,P) = \mathrm{Inn}(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P))$.

(iii) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,T)$ und $\varphi(S)$ vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert, so kann man φ zu einem Morphismus $\psi : \mathrm{N}_\varphi \to P$ fortsetzen.

Ist P eine p-Sylowgruppe einer endlichen Gruppe G, so kann man durch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,T) := \mathrm{Hom}_G(S,T)$ für $S, T \le P$ ein Fusionssystem auf P konstruieren, welches wie anfangs erwähnt die Struktur von G widerspiegelt. Wir werden dieses Fusionssystem mit $\mathcal{F}_G(P)$ bezeichnen. Sei nun G eine endliche Gruppe und B ein Block von RG mit Defektgruppe D. Wir wählen einen Brauer-Korrespondenten $b_D \in \mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$ von B, sodass (D, b_D)

ein B-Sylowpaar ist. Für jede Untergruppe $Q \le D$ sei $b_Q \in \mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ der eindeutig bestimmte Block mit $(Q, b_Q) \le (D, b_D)$. Für zwei Untergruppen $S, T \le D$ definieren wir

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,T) := \{\varphi : S \to T : \exists g \in G : {}^g(S, b_S) \le (T, b_T) \ \wedge\ \varphi(x) = {}^g x\ \forall x \in S\}.$$

Auf diese Weise erhält man ein Fusionssystem auf D, welches die Struktur von B widerspiegelt.

Ist eine endliche Gruppe p-nilpotent oder ein Block nilpotent, so kann man dies direkt an dem dazu gehörigen Fusionssystem ablesen. In Anlehnung daran definieren wir nilpotente Fusionssysteme.

Definition 1.50. Ein Fusionssystem $\mathcal{F}$ auf einer endlichen p-Gruppe P heißt *nilpotent*, falls $\mathcal{F} = \mathcal{F}_P(P)$ gilt.

Analog zum Satz von Frobenius hat man dann folgenden Satz.

Satz 1.51. *Ein Fusionssystem $\mathcal{F}$ auf einer endlichen p-Gruppe P ist genau dann nilpotent, falls* $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ *für alle $Q \le P$ eine p-Gruppe ist.*

Definition 1.52. Ist $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf einer endlichen p-Gruppe P, so sagen wir, dass $\mathcal{F}$ von P *kontrolliert* wird, falls jeder Morphismus in $\mathcal{F}$ die Einschränkung eines Morphismus aus $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$ ist.

Zur Untersuchung von Fusionssystemen werden wir eine starke Version von Alperins Fusionssatz angeben.

Definition 1.53. Sei G eine endliche Gruppe. Eine Untergruppe $H < G$ heißt *stark p-eingebettet*, falls H eine nichttriviale p-Sylowgruppe P von G enthält und $H \cap {}^xP = 1$ für alle $x \in G \setminus H$ gilt.

Man sieht leicht, dass die letzte Bedingung zu

$$p \nmid |H \cap {}^xH| \qquad \text{für alle } x \in G \setminus H$$

äquivalent ist. Ist $\mathrm{O}_p(G) \ne 1$, so kann G offenbar keine stark p-eingebettete Untergruppe enthalten.

Definition 1.54. Sei $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf einer endlichen p-Gruppe P.

(i) Eine Untergruppe $S \le P$ heißt *$\mathcal{F}$-zentrisch*, falls $\mathrm{C}_P(T) = \mathrm{Z}(T)$ für jeden Isomorphismus $S \cong T$ in $\mathcal{F}$ gilt.

(ii) Eine Untergruppe $Q \le P$ heißt *$\mathcal{F}$-essentiell*, falls Q $\mathcal{F}$-zentrisch ist und falls $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)/\mathrm{Inn}(Q)$ eine stark p-eingebettete Untergruppe enthält.

Satz 1.55 (Alperins Fusionssatz)**.** *Sei $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf einer endlichen p-Gruppe P. Dann kann man jeden Isomorphismus in $\mathcal{F}$ als Komposition von endlich vielen Isomorphismen der Form $\varphi : S \to T$ schreiben. Dabei existiert eine Untergruppe $Q \le P$ und ein Element $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ mit $S, T \subseteq Q$ und $\alpha|_S = \varphi$. Außerdem ist $Q = P$ oder Q ist vollständig $\mathcal{F}$-normalisiert und $\mathcal{F}$-essentiell.*

Die Stärke dieses Satzes liegt darin, dass nur sehr wenige Gruppen eine stark p-eingebettete Untergruppe besitzen. Für $p = 2$ hat man zum Beispiel folgende Klassifikation (siehe [9]).

Satz 1.56 (Bender). *Sei G eine endliche Gruppe mit einer stark 2-eingebetteten Untergruppe. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(i) Die 2-Sylowgruppen von G sind zyklisch oder Quaternionengruppen.

(ii) G besitzt eine Normalreihe $1 \leq M < L \leq G$, sodass M und G/L ungerade Ordnungen haben und L/M zu einer der folgenden einfachen Gruppen isomorph ist:

$$\mathrm{PSL}(2, 2^n), \ \mathrm{PSU}(3, 2^n), \ \mathrm{Sz}(2^{2n-1}) \qquad \textit{für } n \geq 2.$$

Dabei ist $\mathrm{PSL}(2, 2^n)$ die projektive spezielle lineare Gruppe der Dimension 2 über dem Körper mit 2^n Elementen. Analog ist $\mathrm{PSU}(3, 2^n)$ die projektive spezielle unitäre Gruppe und $\mathrm{Sz}(2^{2n-1})$ die Suzukigruppe.

Im Fall (i) von Satz 1.56 ist G nach dem Satz von Burnside und dem Satz von Brauer und Suzuki nicht einfach. Im Fall (ii) sind die kleinsten einfachen Gruppen $\mathrm{PSL}(2, 4)$ und $\mathrm{PSL}(2, 8)$ der Ordnung 60 bzw. 504 (siehe zum Beispiel Seite 8 in [38]).

2 Problemstellung und bekannte Resultate

In diesem Kapitel fixieren wir einen Block B von RG mit Defektgruppe D. Wir interessieren uns für folgende Invarianten von B:

- $k(B)$,
- $k_i(B)$ für $i \in \mathbb{N}_0$,
- $l(B)$,
- Die Cartanmatrix von B,
- Die (vollständige) Zerlegungsmatrix von B.

In der Regel sind diese Eigenschaften durch D nicht eindeutig bestimmt. Gibt es zum Beispiel mehrere mögliche Fusionssysteme auf D, so gibt es meistens auch mehrere Möglichkeiten für die Invarianten von B. Man benötigt dann zusätzliche Informationen, die die Beziehung zwischen D und G beschreiben. Daher erfordert die Berechnung dieser Invarianten oft Fallunterscheidungen. Hat man alle Fälle analysiert, so kann man die bekannten Vermutungen über Blöcke von Gruppenalgebren überprüfen. Wir geben sechs wichtige Vermutungen dieser Art an:

Vermutung 1 (Brauers $k(B)$-Vermutung)**.** *Für jeden Block B von RG mit Defektgruppe D gilt $k(B) \le |D|$.*

Vermutung 2 (Brauers Höhe-Null-Vermutung)**.** *Für jeden Block B von RG mit Defektgruppe D gilt: D ist genau dann abelsch, falls $k(B) = k_0(B)$ gilt.*

Vermutung 3 (Olsson-Vermutung)**.** *Für jeden Block B von RG mit Defektgruppe D gilt $k_0(B) \le |D : D'|$.*

Vermutung 4 (Alperin-McKay-Vermutung)**.** *Sei B ein Block von RG mit Defektgruppe D und b sein Brauer-Korrespondent in $\mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(D))$. Dann gilt $k_0(B) = k_0(b)$.*

Vermutung 5 (Dade-Vermutung)**.** *Sei $\mathrm{O}_p(G) = 1$. Für jeden Block B von RG mit Defektgruppe $D \ne 1$ und $i \in \mathbb{N}_0$ gilt dann*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{Q}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{\substack{b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(\sigma)),\\ b^G = B}} k^i(b) = 0.$$

Dabei ist $\mathcal{Q}$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von Ketten

$$P_1 < P_2 < \ldots < P_n$$

mit nichttrivialen p-Untergruppen $P_j \le G$ für $j = 1, \ldots, n$. Für $\sigma \in \mathcal{Q}$ ist $|\sigma| := n$ die Länge *von σ. Außerdem sei $\mathrm{N}_G(\sigma) := \mathrm{N}_G(P_1) \cap \ldots \cap \mathrm{N}_G(P_n)$ der Normalisator von σ in G. Man beachte, dass auch die leere Kette σ mit $|\sigma| = 0$ und $\mathrm{N}_G(\sigma) = G$ zugelassen ist.*

Um schließlich auch noch Alperins Gewichts-Vermutung angeben zu können, benötigen wir noch einen weiteren Begriff. Sei dafür P eine p-Untergruppe von G und β ein Block von $R[\mathrm{N}_G(P)/P]$ mit Defekt 0. Für den eindeutig bestimmten Block $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(P))$, der β dominiert, ist dann $b^G =: B \in \mathrm{Bl}(RG)$ stets definiert. Man nennt das Paar (P, β) ein *B-Gewicht* von G. Ist (P, β) ein B-Gewicht und $g \in G$, so ist auch ${}^g(P, \beta) := ({}^gP, {}^g\beta)$ ein B-Gewicht. Dabei ist wie üblich ${}^g\beta$ ein Block von $R[\mathrm{N}_G({}^gP)/{}^gP]$. Auf diese Weise operiert G durch Konjugation auf der Menge der B-Gewichte.

Vermutung 6 (Alperins Gewichts-Vermutung)**.** *Für jeden Block B von RG ist $l(B)$ die Anzahl der Konjugationsklassen von B-Gewichten.*

Gilt die Dade-Vermutung (für alle Gruppen und Blöcke), so gilt auch Alperins Gewichts-Vermutung. Für einen speziellen Block ist dieser Zusammenhang jedoch unbekannt. Ist die Defektgruppe D von $B \in \mathrm{Bl}(RG)$ abelsch, so ist Alperins Gewichts-Vermutung äquivalent zur Aussage $l(B) = l(b)$, wobei $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(D))$ der Brauer-Korrespondent von B ist (siehe [3]).

Nur für wenige Isomorphietypen von D kennt man alle der oben genannten Invarianten. Wir listen $k(B)$, $k_i(B)$ und $l(B)$ in einigen bekannten Fälle auf. Im einfachsten Fall, $D = 1$, ist B sicher nilpotent. Brauer hat weitere Eigenschaften von B bestimmt.

Satz 2.1 (Brauer)**.** *Für einen Block B von FG sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) B hat Defekt 0.

(2) B ist eine einfache F-Algebra.

(3) $B \cong F^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(4) $k(B) = 1$.

(5) Es existiert ein einfacher projektiver FG-Modul, der zu B gehört.

(6) Es existiert ein $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G_p \setminus \{1\}$.

(7) Es existiert ein $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\chi(g) = 0$ für alle $g \in G \setminus G_{p'}$.

(8) Die Cartanmatrix von B ist (1).

(9) Die Zerlegungsmatrix von B ist (1).

Dade hat in [27] den Fall untersucht, dass D zyklisch ist.

Satz 2.2 (Dade)**.** *Sei B ein Block von RG mit zyklischer Defektgruppe D. Dann ist*

$$k(B) = k_0(B) = \frac{|D| - 1}{t(B)} + t(B) \qquad \text{und} \qquad l(B) = t(B).$$

Weiteren Fortschritt hat man speziell im Fall $p = 2$ erzielt. Ist D eine Kleinsche Vierergruppe, so ist $k(B) = k_0(B) = 4$ und $l(B) = t(B) \in \{1, 3\}$. Außerdem ist es Brauer gelungen, den Fall zu behandeln, dass D eine Diedergruppe ist (siehe [19]).

Satz 2.3 (Brauer)**.** *Sei B ein Block von RG mit einer Diedergruppe D der Ordnung 2^n mit $n \geq 3$ als Defektgruppe. Dann ist $k(B) = 2^{n-2} + 3$, $k_0(B) = 4$ und $k_1(B) = 2^{n-2} - 1$. Bei der Bestimmung von $l(B)$ treten drei Fälle auf (entsprechend den verschiedenen Fusionssystemen). Im ersten Fall ist $l(B) = 1$, im zweiten ist $l(B) = 2$ und im dritten ist $l(B) = 3$.*

Bereits ein Jahr später hat Olsson in [76] die Fälle betrachtet, dass D eine Quaternionengruppe oder eine Semidiedergruppe ist.

Satz 2.4 (Olsson)**.**

(i) Sei B ein Block von RG mit einer Quaternionengruppe D der Ordnung 2^n mit $n \geq 3$ als Defektgruppe. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

(a) $n = 3$, $k(B) = 7$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 3$ und $l(B) = 3$.

(b) $n \geq 4$, $k(B) = 2^{n-2}+5$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 2^{n-2}-1$, $k_{n-2}(B) = 2$ und $l(B) = 3$.

(c) $n \geq 4$, $k(B) = 2^{n-2}+4$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 2^{n-2}-1$, $k_{n-2}(B) = 1$ und $l(B) = 2$.

(d) $k(B) = 2^{n-2} + 3$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 2^{n-2} - 1$ und $l(B) = 1$.

(ii) Sei B ein Block von RG mit einer Semidiedergruppe D der Ordnung 2^n mit $n \geq 4$ als Defektgruppe. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

(a) $k(B) = 2^{n-2} + 4$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 2^{n-2} - 1$, $k_{n-2}(B) = 1$ und $l(B) = 3$.

(b) $k(B) = 2^{n-2} + 4$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 2^{n-2} - 1$, $k_{n-2}(B) = 1$ und $l(B) = 2$.

(c) $k(B) = 2^{n-2} + 3$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 2^{n-2} - 1$ und $l(B) = 2$.

(d) $k(B) = 2^{n-2} + 3$, $k_0(B) = 4$, $k_1(B) = 2^{n-2} - 1$ und $l(B) = 1$.

Ensslen und Külshammer geben in [30] folgendes Resultat über Blöcke mit modularen 2-Gruppen als Defektgruppen an.

Satz 2.5 (Ensslen, Külshammer)**.** *Ist B ein Block von RG mit einer modularen 2-Gruppe D der Ordnung 2^n mit $n \geq 4$ als Defektgruppe, so ist B nilpotent. Insbesondere gilt $k(B) = |\mathrm{Irr}(D)| = |\mathrm{Cl}(D)| = 5 \cdot 2^{n-3}$, $k_0(B) = |D : D'| = 2^{n-1}$, $k_1(B) = 2^{n-3}$ und $l(B) = 1$.*

In all diesen Sätzen ist D eine metazyklische Gruppe, und die angegebenen Vermutungen sind erfüllt (siehe zum Beispiel Remark 5.8(iv) in [50] für Alperins Gewichts-Vermutung und [28] sowie [93] für die Dade-Vermutung). Die Situation ist allerdings wesentlich schwieriger, falls p ungerade ist. Ist zum Beispiel $p = 3$ und D eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 9, so sind $k(B)$, $k_i(B)$ und $l(B)$ bereits nicht mehr in allen Fällen bekannt (siehe [55]). Es liegt daher nahe, weitere Familien von metazyklischen 2-Gruppen zu betrachten.

3 Metazyklische Defektgruppen

In diesem Kapitel sei $p = 2$ und B ein Block von RG mit metazyklischer Defektgruppe $D \neq 1$. Wir untersuchen zunächst die Automorphismengruppe von D.

Satz 3.1. *Sei D eine metazyklische 2-Gruppe und $\operatorname{Aut}(D)$ keine 2-Gruppe. Dann ist $D \cong Q_8$ oder $D \cong C_{2^k}^2 := C_{2^k} \times C_{2^k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.*

Dieses Resultat findet sich bereits in [68]. Auf Grund seiner Wichtigkeit für die vorliegende Arbeit wollen wir an dieser Stelle trotzdem einen Beweis angeben.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass D abelsch und o. B. d. A. nichtzyklisch ist. Sei also $D = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$ mit $2^k = |\langle x\rangle| \leq |\langle y\rangle|$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wie üblich definieren wir

$$\Omega_k(D) := \langle z \in D : z^{2^k} = 1\rangle.$$

Im Fall $|\langle x\rangle| < |\langle y\rangle|$ wäre dann $\Omega_k(D)\Phi(D) = \langle x, y^2\rangle$ eine charakteristische maximale Untergruppe von D. Folglich würde $\operatorname{Aut}(D)$ auch die Untergruppe $\Omega_k(D)\Phi(D)/\Phi(D)$ von $D/\Phi(D)$ festhalten. Wie in Abschnitt 1.12 bemerkt wurde, wäre dann $\operatorname{Aut}(D)$ eine 2-Gruppe. Also ist $D = \langle x\rangle \times \langle y\rangle \cong C_{2^k}^2$.

Sei nun D nichtabelsch. Wir argumentieren durch Induktion nach $|D|$. Da die charakteristische Untergruppe D' zyklisch ist, besitzt D auch eine charakteristische Untergruppe $Z \subseteq D'$ der Ordnung 2. Sei $1 \neq \alpha \in \operatorname{Aut}(D)$ ein Automorphismus ungerader Ordnung. Wegen $Z \subseteq D' \subseteq \Phi(D)$ operiert α nichttrivial auf D/Z. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $D/Z \cong Q_8$ oder $D/Z \cong C_{2^k}^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Betrachten wir zuerst den letztgenannten Fall. Dann ist jede Involution von D in der Untergruppe Q mit $Q/Z = \Omega_1(D/Z) =: \Omega(D/Z) \cong C_2^2$ enthalten. Bekanntlich operiert α auch nichttrivial auf Q/Z und damit auch nichttrivial auf Q (siehe zum Beispiel 8.4.3 in [58]). Also ist Q eine Quaternionengruppe der Ordnung 8. Folglich besitzt D nur eine Involution. Dann ist D selbst eine Quaternionengruppe. Im Fall $|D| > 8$ wäre D/Z nichtabelsch. Also ist $D \cong Q_8$.

Kommen wir nun zu dem Fall $D/Z \cong Q_8$. Insbesondere ist dann $|D| = 16$. Jeder zyklische Normalteiler von D mit zyklischer Faktorgruppe muss dann maximal sein. Da α die maximalen Untergruppen transitiv permutiert, sind alle maximalen Untergruppen von D zyklisch. Dann besitzt D nur eine Involution, und es folgt $D \cong Q_{16}$. Diese Gruppe hat aber nur eine zyklische maximale Untergruppe. Widerspruch. □

Betrachten wir jetzt den Fall, dass D zusätzlich abelsch ist.

3.1 Der abelsche Fall

Wie in Abschnitt 1.12 erwähnt wurde, kann man D als direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen schreiben.

Ist D das direkte Produkt zweier nichtisomorpher zyklischer Gruppen, so ist $\mathrm{Aut}(D)$ nach Satz 3.1 eine 2-Gruppe. Mit den gewählten Bezeichnungen ist dann $t(B) = 1$. Folglich ist B nilpotent, und es gilt $k(B) = k_0(B) = |\mathrm{Cl}(D)| = |D|$ und $l(B) = 1$. Dies hat Brauer bereits in [18] ohne Verwendung nilpotenter Blöcke gezeigt.

Nehmen wir nun an, dass D das direkte Produkt zweier isomorpher zyklischer Gruppen ist. (In der Literatur bezeichnet man direkte Produkte von endlich vielen isomorphen zyklischen Gruppen gelegentlich als *homozyklisch*.) Dann ist die Automorphismengruppe von D keine 2-Gruppe mehr; denn mit den Bezeichnungen $D = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$ ist die Abbildung $x \mapsto y$, $y \mapsto x^{-1}y^{-1}$ ein Automorphismus der Ordnung 3. (Wegen $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong S_4$ gilt also auch die Umkehrung von Satz 3.1.) In diesem Fall ist also $t(B) \in \{1, 3\}$. Für $t(B) = 1$ ist B wieder nilpotent. Sei also $t(B) = 3$. Dann gilt folgendes Lemma.

Lemma 3.2. *Jeder nichttriviale Automorphismus α von D mit ungerader Ordnung ist fixpunktfrei, das heißt* $\mathrm{C}_D(\alpha) := \{x \in D : \alpha(x) = x\} = \{1\}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass α keine Involution von D festhält. Dies folgt aber sofort aus der Tatsache, dass α nichttrivial auf $\Omega(D)$ $(=\langle x \in D : x^2 = 1\rangle) \cong C_2^2$ operiert (siehe zum Beispiel 8.4.3 in [58]). □

Usami hat in [94, 95] Blöcke mit abelschen Defektgruppen und Trägheitsindex 2 oder 3 untersucht. Allerdings hat sie dabei stets $p \neq 2$ vorausgesetzt. In späteren Arbeiten zusammen mit Puig gibt sie aber an, dass man den Fall $p = 2$ nun auch behandeln kann (siehe [83, 84, 96, 97, 98]). Insbesondere behauptet sie, dass in diesem Fall Alperins Gewichts-Vermutung erfüllt ist. Für diese Aussage findet man in der Literatur jedoch keinen Beweis. Wir werden daher einen solchen Beweis in unserem speziellen Fall angeben.

Ist D eine 2-Sylowgruppe von G (zum Beispiel wenn B der Hauptblock von G ist) und keine Kleinsche Vierergruppe, so folgt aus Theorem 1 in [15], dass G auflösbar ist (für eine neuere Darstellung siehe Theorem 6.20 in [26]). In diesem Fall weiß man bereits, dass Alperins Gewichts-Vermutung gilt (siehe Corollary 1.3 in [6]). Man kann dann auch mit Satz 1.39 die Zahlen $k(B)$ und $l(B)$ bestimmen.

Kommen wir nun zum allgemeinen Fall. Sei $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(D))$ der Brauer-Korrespondent von B. Offenbar hat dann b eine normale Defektgruppe, und wir können Satz 1.23 anwenden. Sei dafür $b_D \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(D))$ ein Brauer-Korrespondent von b (und B) und $\overline{\mathrm{T}} := \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(D)}(b_D)/\,\mathrm{C}_G(D)$. Offenbar operiert dann $\overline{\mathrm{T}}$ durch Konjugation auf D, und wir bezeichnen mit L das semidirekte Produkt von $\overline{\mathrm{T}}$ mit D bzgl. dieser Operation. Wir identifizieren $\overline{\mathrm{T}}$ und D mit den entsprechenden Untergruppen von L. Die Gruppe L hat dann die Ordnung $|\overline{\mathrm{T}}||D| = 3|D|$. Nach Satz 1.23 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und eine verschränkte Gruppenalgebra A von L über F mit $\overline{b} \cong A^{n\times n}$. Dabei ist $\overline{b}$ der b entsprechende Block in $F\,\mathrm{N}_G(D)$. Nach Satz 1.24 ist $\mathrm{H}^2(L, F^\times) = 1$. Folglich ist sogar $\overline{b} \cong (FL)^{n\times n}$, und $\overline{b}$ ist Morita-äquivalent zur Gruppenalgebra FL. Insbesondere ist $l(b) = l(\overline{b}) = |\mathrm{IBr}(L)|$ die Anzahl der 2-regulären Konjugationsklassen von L. Sei $1 \neq x \in \overline{\mathrm{T}}$. Wäre x zu x^{-1} konjugiert, so wären auch xD und $x^{-1}D$ in der abelschen Gruppe L/D konjugiert. Folglich sind x und x^{-1} nicht konjugiert. Nach dem Satz von Sylow besitzt L also genau drei 2-reguläre Konjugationsklassen. Wir erhalten damit

$$l(b) = 3 = t(B).$$

Wir bestimmen nun $k(b) = k(\overline{b}) = |\mathrm{Irr}(L)| = |\mathrm{Cl}(L)|$. Nach Lemma 3.2 ist $\mathrm{C}_D(\overline{\mathrm{T}}) = 1$. Damit zerfällt $D\,(\subseteq L)$ in die Konjugationsklasse $\{1\}$ und $(|D|-1)/3$ Konjugationsklassen der Länge 3. Sei nun wieder $1 \neq x \in \overline{\mathrm{T}}$. Wegen $\mathrm{C}_D(\overline{\mathrm{T}}) = 1$ ist dann $\mathrm{C}_L(x) = \overline{\mathrm{T}}$. Also hat die Konjugationsklasse von x in L die Länge $|L : \mathrm{C}_L(x)| = |D|$. Analog hat auch die Konjugationsklasse von x^{-1} die Länge $|D|$. Wegen

$$1 + 3\frac{|D|-1}{3} + |D| + |D| = 3|D| = |L|$$

haben wir damit alle Konjugationsklassen von L gefunden. Es ergibt sich

$$k(b) = \frac{|D|-1}{3} + 3 = \frac{|D|-1}{t(B)} + t(B).$$

Für $l(b)$ und $k(b)$ erhält man also die gleichen Werte wie in Satz 2.2. Reynolds hat in [85] gezeigt, dass Brauers Höhe-Null-Vermutung für Blöcke mit normaler Defektgruppe gilt. In unserer Situation gilt also auch $k(b) = k_0(b)$. Mit den Methoden von Usami und Puig beweisen wir nun, dass sich diese Zahlen auf B übertragen.

Satz 3.3. *Mit den obigen Bezeichnungen gibt es einen isometrischen Isomorphismus*

$$\Delta : \mathrm{CF}(L) \to \mathrm{CF}(B)$$

mit $\Delta(\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(L)) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(B)$. Die Isometrie bezieht sich dabei auf die Skalarprodukte $(.\mid.)_L$ und $(.\mid.)_G$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} k(B) = k_0(B) = k(b) &= \frac{|D|-1}{3} + 3 = \frac{|D|-1}{t(B)} + t(B), \\ l(B) = l(b) &= 3 = t(B). \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Vermutungen 1 bis 6 erfüllt.

Bevor wir diesen Satz beweisen, müssen wir einige Begriffe einführen. Hat man die Existenz von Δ in Satz 3.3 bewiesen, so folgt sofort $k(B) = |\mathrm{Irr}(L)| = |\mathrm{Cl}(L)| = k(b)$. Wir werden jedoch wie in den oben erwähnten Artikeln zeigen, dass Δ weitere Eigenschaften erfüllt und eine sogenannte „perfekte Isometrie“ ist (siehe [22] für Details). Als Vorlage wird dabei die Arbeit [84] dienen. In Abschnitt 1.3 dieses Artikels wird begründet, warum Alperins Gewichts-Vermutung und Brauers Höhe-Null-Vermutung aus den Eigenschaften einer perfekten Isometrie folgen. Damit hat man auch $l(B) = l(b)$ und $k_0(B) = k(B)$. Schließlich wird in [81] erwähnt, dass auch die Dade-Vermutung folgt.

Für eine Gruppe H und einen Block C von RH setzen wir

$$\begin{aligned} \pm\,\mathrm{Irr}(H) &:= \mathrm{Irr}(H) \cup \{-\chi : \chi \in \mathrm{Irr}(H)\} \subseteq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(H), \\ \pm\,\mathrm{Irr}(C) &:= \mathrm{Irr}(C) \cup \{-\chi : \chi \in \mathrm{Irr}(C)\} \subseteq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(C), \\ \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}^0(H) &:= \{\chi \in \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(H) : \chi(h) = 0 \text{ für alle } h \in H_{2'}\}, \\ \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}^0(C) &:= \{\chi \in \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(C) : \chi(h) = 0 \text{ für alle } h \in H_{2'}\}. \end{aligned}$$

Für eine Untergruppe $Q \le D$ sei $\overline{H} := HQ/Q$ für alle $H \le \mathrm{N}_G(Q)$. Außerdem sei $\overline{b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}} \in \mathrm{Bl}(R\overline{\mathrm{C}_G(Q)})$ der nach Satz 1.20 eindeutig bestimmte Block, der von $b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}$ dominiert wird. Insbesondere hat $\overline{b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}}$ Defektgruppe $\overline{D} := D/Q$. Für jede Gruppe H und jeden Normalteiler $N \trianglelefteq H$ operiert H auf $\mathrm{CF}(N)$ durch $({}^h\chi)(x) := \chi(h^{-1}xh)$ für $h \in H$, $x \in N$ und $\chi \in \mathrm{CF}(N)$. Analog kann man auf einer Menge von Isometrien zwischen Vektorräumen von Klassenfunktionen operieren. Eine Isometrie nennen wir dann *stabil*, wenn sie bzgl. dieser Operation fest bleibt. Wir können nun den Beweis beginnen.

Beweis von Satz 3.3. Sei $Q < D$. Wie in Abschnitt 3.4 von [84] beschrieben wurde, genügt es zu zeigen, dass man eine Isometrie der Form

$$\overline{\Delta}_Q^0 : \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}^0(\overline{\mathrm{C}_L(Q)}) \to \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}^0\Big(\overline{b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}}\Big)$$

zu einer $\mathrm{N}_{\overline{T}}(Q)$-stabilen Isometrie der Form

$$\overline{\Delta}_Q : \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{C}_L(Q)}) \to \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}\Big(\overline{b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}}\Big)$$

fortsetzen kann. Dabei heißt $\mathrm{N}_{\overline{T}}(Q)$-stabil, dass ${}^x(\overline{\Delta}_Q(\chi)) = \overline{\Delta}_Q(\chi)$ für alle $x \in \mathrm{N}_{\overline{T}}(Q)$ und alle $\chi \in \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{C}_L(Q)})$ gilt.

Betrachten wir zuerst den Fall $Q \ne 1$. Dann ist $\mathrm{C}_L(Q) = D$. Schreibt man $\mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{C}_L(Q)}) = \mathrm{Irr}(\overline{D}) = \{1_{\overline{D}} = \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d\}$ mit $d := |\overline{D}|$, so gilt

$$\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}^0(\overline{D}) = \sum_{i=2}^{d} \mathbb{Z}(\chi_i - \chi_1).$$

Sei $i \in \{2, \ldots, d\}$. Da $\overline{\Delta}_Q^0$ eine Isometrie ist, existieren dann $\widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_i \in \pm\,\mathrm{Irr}\Big(\overline{b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}}\Big)$ mit

$$\overline{\Delta}_Q^0(\chi_i - \chi_1) = \widehat{\chi}_i - \widehat{\chi}_1. \tag{3.1}$$

Im Fall $d = 2$ (und damit $i = 2$) können wir daher $\overline{\Delta}_Q$ durch $\overline{\Delta}_Q(\chi_i) := \widehat{\chi}_i$ für $i = 1, 2$ definieren. Offenbar ist dann $\overline{\Delta}_Q$ eine Isometrie, die $\overline{\Delta}_Q^0$ fortsetzt. Da $\mathrm{Aut}(Q)$ in diesem Fall eine 2-Gruppe ist, ist $\mathrm{N}_{\overline{T}}(Q) = 1$. Also ist $\overline{\Delta}_Q$ auch $\mathrm{N}_{\overline{T}}(Q)$-stabil.

Sei nun $d > 2$. Für $i \ne j \in \{2, \ldots, d\}$ ist dann

$$\big(\overline{\Delta}_Q^0(\chi_i - \chi_1) \mid \overline{\Delta}_Q^0(\chi_j - \chi_1)\big)_{\overline{\mathrm{C}_G(Q)}} = (\chi_i - \chi_1 \mid \chi_j - \chi_1)_{\overline{D}} = 1.$$

Also kann man o. B. d. A. annehmen, dass ein $\widehat{\chi}_j \in \pm\,\mathrm{Irr}\Big(\overline{b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}}\Big) \setminus \{\pm\widehat{\chi}_1, \pm\widehat{\chi}_i\}$ mit

$$\overline{\Delta}_Q^0(\chi_j - \chi_1) = \widehat{\chi}_j - \widehat{\chi}_1 \tag{3.2}$$

existiert (gegebenenfalls muss man $\widehat{\chi}_1$ und $-\widehat{\chi}_i$ vertauschen). Die verallgemeinerten Charaktere $\widehat{\chi}_k$ mit $k \in \{1, i, j\}$ sind dann durch die Gleichungen (3.1) und (3.2) eindeutig bestimmt. Wir behaupten nun, dass für $k \in \{2, \ldots, d\} \setminus \{i, j\}$ ein eindeutig bestimmtes $\widehat{\chi}_k \in \pm\,\mathrm{Irr}(\overline{b_D^{\mathrm{C}_G(Q)}}) \setminus \{\pm\widehat{\chi}_1, \pm\widehat{\chi}_i, \pm\widehat{\chi}_j\}$ mit

$$\overline{\Delta}_Q^0(\chi_k - \chi_1) = \widehat{\chi}_k - \widehat{\chi}_1$$

existiert. Wäre dies nicht der Fall, so würde es ein $k \in \{2, \ldots, d\} \setminus \{i, j\}$ mit $\overline{\Delta}_Q^0(\chi_k - \chi_1) = \widehat{\chi}_i + \widehat{\chi}_j$ geben. Dann hätten wir aber den Widerspruch $0 = \widehat{\chi}_i(1) + \widehat{\chi}_j(1) = 2\widehat{\chi}_1(1)$. Wir definieren nun $\overline{\Delta}_Q(\chi_i) := \widehat{\chi}_i$ für $i = 1, \ldots, d$. Da die $\widehat{\chi}_i$ für $i = 1, \ldots, d$ paarweise orthogonal sind, ist dann $\overline{\Delta}_Q$ eine Isometrie, die $\overline{\Delta}_Q^0$ fortsetzt. Da alle $\widehat{\chi}_i$ eindeutig bestimmt sind, ist auch $\overline{\Delta}_Q$ eindeutig bestimmt. Insbesondere ist $\overline{\Delta}_Q$ stabil unter $\mathrm{N}_{\overline{\mathrm{T}}}(Q)$.

Betrachten wir nun den Fall $Q = 1$. Dann ist $\overline{\mathrm{C}_L(Q)} \cong L$ und $\overline{\mathrm{C}_G(Q)} \cong G$. Also ist

$$\Delta_1^0 := \overline{\Delta}_Q^0 : \mathbb{Z}\operatorname{Irr}^0(L) \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr}^0(B).$$

Wir bestimmen nun $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}^0(L)$. Sei dafür $1_D = \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ mit $d := \frac{|D|-1}{3} + 1$ ein Repräsentantensystem für die Bahnen von $\overline{\mathrm{T}}$ auf $\operatorname{Irr}(D)$. Außerdem sei $\rho_i := \operatorname{Ind}_D^L(\chi_i)$ für $i = 1, \ldots, d$. Nach Clifford ist dann $\rho_i \in \operatorname{Irr}(L)$ für $i \geq 2$. Andererseits ist $\rho_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$ mit drei irreduziblen linearen Charakteren $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ von L. Die verallgemeinerten Charaktere $\rho_i - \rho_1 \in \mathbb{Z}\operatorname{Irr}^0(L)$ für $i = 2, \ldots, d$ sind dann linear unabhängig über K. Da die Anzahl der 2-singulären Konjugationsklassen in L genau $d - 1$ ist, kann der Rang von $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}^0(L)$ höchstens $d - 1$ sein. Also ist

$$\mathbb{Z}\operatorname{Irr}^0(L) = \sum_{i=2}^{d} \mathbb{Z}(\rho_i - \rho_1).$$

Sei $i \in \{2, \ldots, d\}$. Dann ist

$$\left(\Delta_1^0(\rho_i - \rho_1) \mid \Delta_1^0(\rho_i - \rho_1)\right)_G = 4.$$

Also existieren paarweise orthogonale $\widehat{\rho}_i, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2, \widehat{\zeta}_3 \in \pm\operatorname{Irr}(B)$ mit

$$\Delta_1^0(\rho_i - \rho_1) = \widehat{\rho}_i - \widehat{\zeta}_1 - \widehat{\zeta}_2 - \widehat{\zeta}_3.$$

Im Fall $|D| = 4$ ist $i = d = 2$. Dann kann man $\Delta_1 := \overline{\Delta}_Q$ durch $\Delta_1(\zeta_i) = \widehat{\zeta}_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $\Delta_1(\rho_2) = \widehat{\rho}_2$ definieren. Offenbar ist dann Δ_1 eine Isometrie, die Δ_1^0 fortsetzt. Da $\widehat{\zeta}_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $\widehat{\rho}_2$ Klassenfunktionen von G sind, ist Δ_1 auch $\mathrm{N}_{\overline{\mathrm{T}}}(Q)$-stabil. Sei also $|D| \geq 16$ und damit $d \geq 6$. Für $i \neq j \in \{2, \ldots, d\}$ existiert dann ein $\widehat{\rho}_j \in \pm\operatorname{Irr}(B) \setminus \{\pm\widehat{\rho}_i, \pm\widehat{\zeta}_1, \pm\widehat{\zeta}_2, \pm\widehat{\zeta}_3\}$ mit

$$\Delta_1^0(\rho_j - \rho_1) = \widehat{\rho}_j - \widehat{\zeta}_1 - \widehat{\zeta}_2 - \widehat{\zeta}_3.$$

Dabei muss man gegebenenfalls $\pm\widehat{\rho}_i, \pm\widehat{\zeta}_1, \pm\widehat{\zeta}_2, \pm\widehat{\zeta}_3$ geeignet permutieren. Wir behaupten nun, dass für $k \in \{2, \ldots, d\} \setminus \{i, j\}$ ein $\widehat{\rho}_k \in \pm\operatorname{Irr}(B) \setminus \{\pm\widehat{\rho}_i, \pm\widehat{\rho}_j, \pm\widehat{\zeta}_1, \pm\widehat{\zeta}_2, \pm\widehat{\zeta}_3\}$ mit

$$\Delta_1^0(\rho_k - \rho_1) = \widehat{\rho}_k - \widehat{\zeta}_1 - \widehat{\zeta}_2 - \widehat{\zeta}_3$$

existiert. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $k \in \{2, \ldots, d\} \setminus \{i, j\}$ mit o. B. d. A.

$$\Delta_1^0(\rho_k - \rho_1) = \widehat{\rho}_i + \widehat{\rho}_j - \widehat{\zeta}_1 - \widehat{\zeta}_2.$$

Dabei muss man gegebenenfalls wieder $\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2, \widehat{\zeta}_3$ geeignet permutieren. Dann ist

$$0 = \Delta_1^0(\rho_k - \rho_1)(1) = \widehat{\rho}_i(1) + \widehat{\rho}_j(1) - \widehat{\zeta}_1(1) - \widehat{\zeta}_2(1) = \widehat{\zeta}_1(1) + \widehat{\zeta}_2(1) + 2\widehat{\zeta}_3(1). \tag{3.3}$$

Wegen $d \geq 6$ existieren $l, m \in \{2, \ldots, d\} \setminus \{i, j, k\}$ mit $l \neq m$ und

$$\Delta_1^0(\rho_l - \rho_1) = \widehat{\rho}_i + \widehat{\rho}_j - \widehat{\zeta}_1 - \widehat{\zeta}_3,$$
$$\Delta_1^0(\rho_m - \rho_1) = \widehat{\rho}_i + \widehat{\rho}_j - \widehat{\zeta}_2 - \widehat{\zeta}_3.$$

Hieraus folgt nun $0 = \Delta_1^0(\rho_l - \rho_1)(1) = \widehat{\zeta}_2(1) - \widehat{\zeta}_3(1)$ und $\widehat{\zeta}_1(1) = \widehat{\zeta}_2(1) = \widehat{\zeta}_3(1)$. Dies widerspricht aber Gleichung (3.3).

Wir können also nun Δ_1 durch $\Delta_1(\zeta_i) := \widehat{\zeta_i}$ für $i = 1, 2, 3$ und $\Delta_1(\rho_i) := \widehat{\rho}_i$ für $i = 2, \ldots, d$ definieren. Dann ist Δ_1 eine Isometrie, die Δ_1^0 fortsetzt. Da $\widehat{\zeta_i}$ für $i = 1, 2, 3$ und $\widehat{\rho}_i$ für $i = 2, \ldots, d$ Klassenfunktionen von G sind, ist Δ_1 auch $\mathrm{N}_{\overline{\mathrm{T}}}(Q)$-stabil. Damit ist der Satz bewiesen. □

Der Vollständigkeit halber untersuchen wir noch die Cartanmatrix von B.

Lemma 3.4. *Die Elementarteiler der Cartanmatrix von B sind $1, 1, |D|$.*

Beweis. Sei (u, b) ein B-Element mit $u \neq 1$. Nach Satz 1.39 hat dann auch b Defektgruppe D. Die Trägheitsgruppe von b muss wegen $u \in \mathrm{Z}(\mathrm{C}_G(u))$ trivial auf D operieren (siehe Lemma 3.2). Insbesondere ist $t(b) = l(b) = 1$. Corollary 1 in [35] impliziert nun $\det C = |D|$ für die Cartanmatrix C von B. Da $|D|$ stets ein Elementarteiler von C ist, folgt die Behauptung unmittelbar. □

Als Folgerung kann man die Cartanmatrix in Spezialfällen explizit bestimmen.

Satz 3.5. *Ist $D \trianglelefteq G$, so ist*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} |D|+2 & |D|-1 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|+2 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|-1 & |D|+2 \end{pmatrix}$$

die Cartanmatrix von B.

Beweis. Zu Beginn des Abschnitts haben wir gesehen, dass B und FL Morita-äquivalent sind (Satz 1.23). Nach Satz 1.42(ii) haben B und FL die gleiche Cartanmatrix. Da FL nur einen Block besitzt (siehe Corollary V.3.11 in [32]), kann man $G = L$ und $B = B_0(G)$ annehmen. Durch Inflation erhält man aus G/D die drei irreduziblen Brauer-Charaktere von B. Insbesondere haben die einfachen Moduln von B die Dimension 1. Die entsprechenden unzerlegbaren projektiven Moduln haben alle die Dimension $|D|$. Daher ist $(1, 1, 1)$ ein Eigenvektor der Cartanmatrix C von B zum Eigenwert $|D|$. Nach Lemma 3.4 ist $\det C = |D|$. Da C positiv definit ist, sind die anderen beiden Eigenwerte von C also 1. Der entsprechende Eigenraum zum Eigenwert 1 ist gerade das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Standardskalarprodukts. Die Hauptachsentransformation ergibt nun

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |D| & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} |D|+2 & |D|-1 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|+2 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|-1 & |D|+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Im Allgemeinen ist es schwierig, die Cartanmatrix explizit zu bestimmen. Wir werden aber zeigen, dass Satz 3.5 bis auf Äquivalenz richtig bleibt. Dabei heißen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *äquivalent*, falls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ mit $A = SBS^{\mathrm{T}}$ existiert (Brauer beschreibt in [14] ein ähnliches Konzept mit sogenannten „basic sets"). Ist n ungerade, so könnte man statt $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ auch $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ wählen; denn mit S erfüllt auch $-S$ die angegebene Bedingung. Offenbar haben zwei äquivalente Matrizen die gleichen Elementarteiler.

Satz 3.6. *Die Cartanmatrix von B ist zur Matrix*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} |D|+2 & |D|-1 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|+2 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|-1 & |D|+2 \end{pmatrix}$$

äquivalent.

Beweis. Für $|D| = 4$ ist die Behauptung bereits bekannt (siehe Proposition (7D) in [18]). Im Allgemeinen folgt die Aussage aus Theorem 4.11 in [23] unter Anwendung der Sätze 3.3 und 3.5. □

3.2 Der nichtabelsche Fall

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass die Defektgruppe D von B metazyklisch und nichtabelsch ist. Es wird sich zeigen, dass dann B in fast allen Fällen nilpotent ist. Um dies zu zeigen, verwenden wir die in Abschnitt 1.13 eingeführte Theorie der Fusionssysteme. Wir beginnen mit zwei gruppentheoretischen Lemmata.

Lemma 3.7. *Sei P eine metazyklische 2-Gruppe, und sei $Q \le P$ eine Untergruppe maximaler Klasse. Dann hat auch P maximale Klasse.*

Beweis. Durch Induktion nach $|P : Q|$ können wir $|P : Q| = 2$ annehmen. Da Q maximale Klasse hat, ist $|Q : Q'| = 4$, und $Q/Q' = Q/\Phi(Q)$ ist elementarabelsch. Für jeden Normalteiler $N \trianglelefteq Q$ mit zyklischer Faktorgruppe Q/N gilt also $|Q : N| \le 2$. Sei nun $\langle x\rangle \trianglelefteq P$, sodass $P/\langle x\rangle$ zyklisch ist. Dann ist $Q \cap \langle x\rangle \trianglelefteq Q$ und $Q/Q\cap\langle x\rangle \cong Q\langle x\rangle/\langle x\rangle \le P/\langle x\rangle$ ist auch zyklisch. Folglich ist $|Q\langle x\rangle : \langle x\rangle| = 2$ und $|P : \langle x\rangle| \le 4$. Betrachten wir zuerst den Fall $|P : \langle x\rangle| = 4$. Dann existiert ein Element $y \in P \setminus Q$ mit $y^2 \in Q \setminus \langle x\rangle$ und $Q = \langle x, y^2\rangle$. Wegen $y^4 \in \langle x\rangle$ induziert y einen Automorphismus auf $\langle x\rangle$ der Ordnung kleiner gleich 4. Da Q nichtabelsch ist, induziert also y^2 ein Quadrat in $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle)$ der Ordnung 2. Sei nun $|\langle x\rangle| = 2^n$ mit $n \ge 2$. Bekanntlich ist dann $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle) \cong C_{2^{n-2}} \times C_2$. Im Fall $n = 2$ ist jedes Quadrat in $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle)$ trivial. Also ist $n \ge 3$, und die Abbildung $x \mapsto x^{1+2^{n-1}}$ ist das einzige Quadrat in $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle)$ der Ordnung 2. Insbesondere ist $y^2xy^{-2} = x^{1+2^{n-1}}$. Damit erhalten wir aber den Widerspruch $4 \le |\langle x^2\rangle| \le |\mathrm{Z}(Q)|$.

Wir können also nun den Fall $|P : \langle x\rangle| = 2$ betrachten. Dann ist P eine Diedergruppe, eine Semidiedergruppe, eine Quaternionengruppe oder eine modulare Gruppe. Im letzten Fall wären aber alle echten Untergruppen von P (insbesondere Q) abelsch (siehe zum Beispiel Lemma 6 in [30]). Also hat P maximale Klasse. □

Lemma 3.8. *Sei P eine metazyklische 2-Gruppe und $C_{2^k}^2 \cong Q < P$ mit $k \ge 2$. Dann ist die Operation von $\mathrm{N}_P(Q)/Q$ auf $Q/\Phi(Q)$ durch Konjugation nicht treu.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass $\mathrm{N}_P(Q)/Q$ treu auf $Q/\Phi(Q)$ operiert. Der Einfachheit halber nehmen wir auch $\mathrm{N}_P(Q) = P$ an. Wegen $|\mathrm{Aut}(Q/\Phi(Q))| = 6$ ist dann $|P : Q| = 2$. Also ist $P/\Phi(Q)$ nichtabelsch der Ordnung 8. Sei nun $\langle x \rangle \trianglelefteq P$, sodass $P/\langle x \rangle$ zyklisch ist. Dann ist auch $(P/\Phi(Q))/(\langle x \rangle \Phi(Q)/\Phi(Q)) \cong P/\langle x \rangle \Phi(Q)$ zyklisch, und wie in Lemma 3.7 folgt $|P : \langle x \rangle \Phi(Q)| = 2$. Im Fall $x \in Q$ wäre $Q/\Phi(Q) = \langle x \rangle \Phi(Q)/\Phi(Q)$ zyklisch. Also ist $x \notin Q$. Wir betrachten nun die Einschränkungsabbildung $\varphi : \mathrm{Aut}(\langle x \rangle) \to \mathrm{Aut}(\langle x^2 \rangle)$. Offenbar ist φ ein Epimorphismus und $|\mathrm{Ker}(\varphi)| \le 2$. Die Operation von Q auf $\langle x \rangle$ durch Konjugation induziert einen Homomorphismus $\psi : Q \to \mathrm{Aut}(\langle x \rangle)$. Wegen $x^2 \in Q$ ist dabei $\psi(Q) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Da $\mathrm{Ker}(\varphi)$ höchstens die Ordnung 2 hat, ist $\Phi(Q) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. Nach Burnsides Basissatz existiert ein $y \in Q$ mit $Q = \langle y, xyx^{-1} \rangle$. Wegen $y^2 \in \Phi(Q) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ ist dann $\Phi(Q) = \langle y^2, xy^2x^{-1} \rangle = \langle y^2 \rangle$ zyklisch. Dies widerspricht aber $k \ge 2$. □

Man kann zeigen, dass P in Lemma 3.8 nicht maximale Klasse haben kann. Darüber hinaus ist Q die einzige Untergruppe vom Isomorphietyp $C_{2^k}^2$. Insbesondere gilt also $\mathrm{N}_P(Q) = P$. Diese Aussagen werden wir im nächsten Satz aber gar nicht benötigen.

Satz 3.9. *Sei P eine metazyklische 2-Gruppe und $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf P. Hat P nicht maximale Klasse, und ist P kein direktes Produkt zweier isomorpher zyklischer Gruppen, so ist $\mathcal{F}$ nilpotent. Insbesondere ist dann jeder Block mit Defektgruppe P nilpotent.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass P keine $\mathcal{F}$-essentiellen Untergruppen besitzt. Sei dazu $Q \le P$ eine $\mathcal{F}$-essentielle Untergruppe. Dann ist $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)/\mathrm{Inn}(Q)$ und damit $\mathrm{Aut}(Q)$ keine 2-Gruppe. Nach Satz 3.1 und Lemma 3.7 ist also $Q \cong C_{2^k}^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Betrachten wir zuerst den Fall $k = 1$. Dann ist $Q \subseteq \Omega(P)$. Im Fall $|\Omega(P)| > 4$ wäre $\Omega(P)$ nichtabelsch. Insbesondere würden zwei nichtvertauschbare Involutionen in P liegen. Diese erzeugen aber eine Diedergruppe im Widerspruch zu Lemma 3.7. Also ist $Q = \Omega(P) \trianglelefteq P$. Da Q auch $\mathcal{F}$-zentrisch ist, gilt $\mathrm{C}_P(Q) = Q$. Somit ist $P/Q = \mathrm{N}_P(Q)/\mathrm{C}_P(Q)$ zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(Q)$ isomorph. Wegen $|\mathrm{Aut}(Q)| = 6$ ist daher $|P : Q| = 2$ und $|P| = 8$. Dann hätte P aber maximale Klasse.

Sei nun $k \ge 2$. Betrachten wir die Operation von $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)/\mathrm{Aut}_Q(Q)$ auf $Q/\Phi(Q)$. Nach Lemma 3.8 operiert $1 \ne \mathrm{N}_P(Q)/Q = \mathrm{N}_P(Q)/\mathrm{C}_P(Q) \cong \mathrm{Aut}_P(Q) \le \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ nicht treu. Andererseits operiert bekanntlich jeder nichttriviale Automorphismus ungerader Ordnung nichttrivial auf $Q/\Phi(Q)$. Also ist der Kern dieser Operation ein nichttrivialer 2-Normalteiler von $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$. Insbesondere ist $\mathrm{O}_2(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)) \ne 1$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ eine stark 2-eingebettete Untergruppe besitzt. Folglich gibt es keine $\mathcal{F}$-essentiellen Untergruppen.

Sei nun $Q \le P$ eine beliebige Untergruppe und $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$. Nach Alperins Fusionssatz ist dann φ die Einschränkung eines Automorphismus $\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) \subseteq \mathrm{Aut}(P)$. Da $\mathrm{Aut}(P)$ eine 2-Gruppe ist, muss auch φ ein 2-Element sein, und die Behauptung folgt. □

Schließlich bemerken wir noch, dass folgende Umkehrung von Satz 3.9 gilt.

Satz 3.10. *Für eine 2-Gruppe maximaler Klasse oder ein direktes Produkt zweier isomorpher zyklischer 2-Gruppen gibt es stets ein nichtnilpotentes Fusionssystem.*

Beweis. Sei P eine 2-Gruppe mit der angegebenen Eigenschaft. Es genügt zu zeigen, dass eine nicht 2-nilpotente Gruppe G mit $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ existiert. Ist P ein direktes Produkt zweier isomorpher zyklischer Gruppen, so kann man für G ein semidirektes Produkt vom

Typ $P \rtimes C_3$ wählen. Hat P maximale Klasse, so folgt die Behauptung aus den Theoremen 2.4, 2.5 und 2.6 in [99]. □

3.3 Zusammenfassung

Wir fassen nun noch einmal die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen.

Satz 3.11. *Sei B ein 2-Block von RG mit metazyklischer Defektgruppe D. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(i) B ist nilpotent.

(ii) D hat maximale Klasse, das heißt, D ist eine Diedergruppe, eine Quaternionengruppe oder eine Semidiedergruppe. In diesem Fall kann man mit Satz 2.3 bzw. Satz 2.4 die numerischen Invarianten von B berechnen. Außerdem wurde in [31] die Algebrastruktur von B bestimmt.

(iii) D ist ein direktes Produkt zweier isomorpher zyklischer Gruppen, und es gilt

$$k(B) = k_0(B) = \frac{|D|-1}{3} + 3, \qquad l(B) = t(B) = 3.$$

Setzt man $L := D \rtimes C_3$, so gibt es eine perfekte Isometrie $\Delta : \mathrm{CF}(L) \to \mathrm{CF}(B)$. Die Cartanmatrix von B ist zur Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} |D|+2 & |D|-1 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|+2 & |D|-1 \\ |D|-1 & |D|-1 & |D|+2 \end{pmatrix}$$

äquivalent, wobei im Fall $D \trianglelefteq G$ sogar Gleichheit gilt. Insbesondere sind $1, 1, |D|$ die Elementarteiler der Cartanmatrix.

In allen Fällen sind die Vermutungen 1 bis 6 erfüllt.

Damit haben wir Blöcke mit metazyklischen Defektgruppen im Fall $p = 2$ vollständig untersucht. Für ungerade Primzahlen p hat Stancu in [92] gezeigt, dass jedes Fusionssystem auf einer metazyklischen p-Gruppe P durch P kontrolliert wird. In der relativ neuen Arbeit [42] wurden nichtabelsche Defektgruppen mit einer zyklischen Untergruppe vom Index p (modulare p-Gruppen) betrachtet. Allerdings hat man nur unter zusätzlichen Voraussetzungen Ergebnisse erzielt. Erwähnenswert in diesem Zusammenhang sind auch die beiden Artikel [41, 40] von Hendren über nichtabelsche Defektgruppen der Ordnung p^3. Alghamdi hat in [1, 2] die Arbeit von Hendren fortgesetzt, und die Beziehungen zwischen den Vermutungen für nichtabelsche Defektgruppen der Ordnung p^3 untersucht.

4 Minimal nichtabelsche Defektgruppen

Wir haben gesehen, dass die Struktur eines 2-Blocks mit metazyklischer Defektgruppe im Wesentlichen bekannt ist. Wir werden daher nun 2-Gruppen betrachten, die nicht mehr metazyklisch sind. Es ist allerdings nicht unmittelbar klar, was für unsere Problemstellung eine „sinnvolle“ Verallgemeinerung von metazyklisch ist. Olsson hat in [77] begonnen, 2-Blöcke mit minimal nichtabelschen Defektgruppen zu untersuchen. Wir werden dieses Konzept aufgreifen, und seine Arbeit fortsetzen.

Jede endliche nichtabelsche Gruppe enthält eine *minimal nichtabelsche* Untergruppe. Minimal heißt dabei, dass jede echte Untergruppe abelsch ist. Natürlich genügt es auch zu verlangen, dass alle maximalen Untergruppen abelsch sind. Rédei hat in [90] minimale nichtabelsche Gruppen klassifiziert (daher auch die Bezeichnung „Rédei-Gruppen“). Für endliche p-Gruppen treten dabei folgende drei Fälle auf:

(i) $\langle x, y \mid x^{p^r} = y^{p^s} = 1,\ xyx^{-1} = y^{1+p^{r-1}} \rangle$ mit $r \geq 2$ und $s \geq 1$,

(ii) $\langle x, y \mid x^{p^r} = y^{p^s} = [x, y]^p = [x, x, y] = [y, x, y] = 1 \rangle$ mit $r \geq s \geq 1$,

(iii) Q_8.

Wie üblich ist dabei $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ und $[x, x, y] := [x, [x, y]]$. Im ersten und letzten Fall ergeben sich ausschließlich metazyklische Gruppen. Außer den Gruppen D_8 und Q_8 führen diese Gruppen als Defektgruppen für $p = 2$ nur zu nilpotenten Blöcken. Man beachte, dass der erste Fall dann auch die modularen 2-Gruppen einschließt. Wir werden daher 2-Gruppen vom Typ (ii) betrachten. Olsson hat in der eingangs zitierten Arbeit ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von B-Elementen bestimmt. Allerdings konnte er nicht die Zahlen $k(B)$ und $l(B)$ ausrechnen. Außerdem hat er in Proposition 1.1(ii) die Relationen $[x, x, y] = [y, x, y] = 1$ vergessen. Ohne diese entstehen für $r \geq 2$ jedoch unendliche Gruppen (siehe zum Beispiel Theorem 1.1 in [43]). Bevor wir uns auf 2-Gruppen vom Typ (ii) beschränken, geben wir eine alternative Charakterisierung von minimal nichtabelschen p-Grupen an.

Lemma 4.1. *Eine p-Gruppe P ist genau dann minimal nichtabelsch, wenn $|P : \Phi(P)| = p^2$ und $|P'| = p$ gilt. Dies ist weiterhin äquivalent dazu, dass sich P durch zwei Elemente erzeugen lässt und p die maximale Länge einer Konjugationsklasse in P ist.*

Beweis. Sei P minimal nichtabelsch. Dann existieren nichtvertauschbare Elemente $x, y \in P$. Auf Grund der Minimalität von P ist $P = \langle x, y \rangle$ und $|P : \Phi(P)| = p^2$. Sei nun $z \in P$ beliebig. Dann liegt z in einer maximalen Untergruppe M von P. Da M abelsch ist, gilt $M \leq \mathrm{C}_P(x)$. Dies zeigt, dass p die maximale Länge einer Konjugationsklasse in P ist. Nach einem Resultat von Knoche (siehe zum Beispiel Aufgabe III.24b) in [45]) ist dies äquivalent zu $|P'| = p$.

Sei nun umgekehrt $|P : \Phi(P)| = p^2$ und $|P'| = p$. Bekanntlich ist dann $P' \leq \mathrm{Z}(P)$. Für beliebige Elemente $x, y \in P$ gilt nun $[x^p, y] = [x, y]^p = 1$ (siehe zum Beispiel Hilfssatz III.1.3a) in [45]). Dies zeigt $\Phi(P) = P'\langle x^p : x \in P \rangle \leq \mathrm{Z}(P)$. Für eine maximale Untergruppe M von P ist daher $|M : \mathrm{Z}(M)| \leq |M : M \cap \mathrm{Z}(P)| \leq |M : \Phi(P)| = p$. Also sind alle maximalen Untergruppen abelsch, und P ist minimal nichtabelsch. $\square$

Wir fassen nun einige gruppentheoretische Eigenschaften in einem Lemma zusammen.

Lemma 4.2. *Sei*

$$P := \langle x, y \mid x^{2^r} = y^{2^s} = [x,y]^2 = [x,x,y] = [y,x,y] = 1\rangle$$

mit $r \ge s \ge 1$. *Wir setzen* $z := [x,y]$. *Dann gilt:*

(i) $|P| = 2^{r+s+1}$.

(ii) $\Phi(P) = \mathrm{Z}(P) = \langle x^2, y^2, z\rangle \cong C_{2^{r-1}} \times C_{2^{s-1}} \times C_2$.

(iii) $P' = \langle z\rangle \cong C_2$.

(iv) $|\mathrm{Cl}(P)| = 5 \cdot 2^{r+s-2}$.

(v) Für $r = s = 1$ *ist* $P \cong D_8$. *Für* $r \ge 2$ *sind die maximalen Untergruppen von* P *durch*

$$\begin{aligned}\langle x^2, y, z\rangle &\cong C_{2^{r-1}} \times C_{2^s} \times C_2,\\ \langle x, y^2, z\rangle &\cong C_{2^r} \times C_{2^{s-1}} \times C_2,\\ \langle xy, x^2, z\rangle &\cong C_{2^r} \times C_{2^{s-1}} \times C_2\end{aligned}$$

gegeben.

Beweis.

(i) Offenbar lässt sich jedes Element in P in der Form $x^iy^jz^k$ mit $i \in \{0,\ldots,2^r-1\}$, $j \in \{0,\ldots,2^s-1\}$ und $k \in \{0,1\}$ schreiben. Daraus folgt $|P| \le 2^{r+s+1}$. Umgekehrt hat Rédei gezeigt, dass es eine Gruppe der Ordnung 2^{r+s+1} mit den angegebenen Relationen gibt. Insbesondere sind in der Darstellung $x^iy^jz^k$ die Zahlen i, j, k eindeutig bestimmt. Dies werden wir ab jetzt stillschweigend verwenden.

(ii) Wie im Beweis von Lemma 4.1 gilt $\Phi(P) = \mathrm{Z}(P)$. Es ist $x^2, y^2 \in \Phi(P)$ und $z \in P' \subseteq \Phi(P)$. Nach Teil (i) ist $|\langle x^2, y^2, z\rangle| = 2^{r+s-1}$.

(iii) Wegen $z \in \mathrm{Z}(P)$ ist $\langle z\rangle \trianglelefteq P$. Außerdem ist $P/\langle z\rangle$ abelsch, und die Behauptung folgt.

(iv) Nach Lemma 4.1 hat jede Konjugationsklasse höchstens zwei Elemente. Also ist

$$|\mathrm{Cl}(P)| = |\mathrm{Z}(P)| + \frac{|P| - |\mathrm{Z}(P)|}{2} = 2^{r+s-1} + 2^{r+s} - 2^{r+s-2} = 5 \cdot 2^{r+s-2}.$$

(v) Folgt aus den Teilen (i) und (ii). □

Rédei hat auch gezeigt, dass man für unterschiedliche Paare (r,s) nichtisomorphe Gruppen erhält. Somit erhält man stets $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ paarweise nichtisomorphe Gruppen der Ordnung 2^n. Dabei ist $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ wie üblich die größte natürliche Zahl kleiner gleich $\frac{n-1}{2}$. Für $r \ne 1$ (das heißt $|P| \ge 16$) erkennt man an der Struktur der maximalen Untergruppen, dass ausschließlich nichtmetazyklische Gruppen entstehen. Die Anzahl der nichtmetazyklischen minimal nichtabelschen Gruppen der Ordnung 2^n hat also die Größenordnung n.

Um die Fusion in minimal nichtabelschen Gruppen zu studieren, ist es hilfreich, die Automorphismengruppen zu kennen.

Lemma 4.3. *Sei* P *wie in Lemma 4.2. Genau dann ist* $\mathrm{Aut}(P)$ *eine* 2*-Gruppe, falls* $r \ne s$ *oder* $r = s = 1$ *gilt.*

Beweis. In den Fällen $r \neq s$ und $r = s = 1$ existiert nach Lemma 4.2(v) eine charakteristische maximale Untergruppe in P. Also ist dann $\operatorname{Aut}(P)$ eine 2-Gruppe. Im Fall $r = s \geq 2$ rechnet man leicht nach, dass die Abbildung $x \mapsto y$, $y \mapsto x^{-1}y^{-1}$ ein Automorphismus der Ordnung 3 ist. □

Wir haben früher bereits gesehen, dass die Automorphismengruppe von $C_{2^n}^2$ für $n \in \mathbb{N}$ keine 2-Gruppe ist. Das nächste Lemma verallgemeinert dies.

Lemma 4.4. *Sei $P \cong C_{2^{n_1}} \times \ldots \times C_{2^{n_k}}$ mit $n_1, \ldots, n_k, k \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $\operatorname{Aut}(P)$ eine 2-Gruppe, wenn die n_i für $i = 1, \ldots, k$ paarweise verschieden sind.*

Beweis. Gilt $n_i = n_j$ für $1 \leq i < j \leq k$, so existiert ein Automorphismus der Ordnung 3 auf $C_{2^{n_i}} \times C_{2^{n_j}}$. Diesen kann man sicher auf P fortsetzen. Sei nun umgekehrt $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Ähnlich wie in Satz 3.1 operiert dann $\operatorname{Aut}(P)$ trivial auf den Faktorgruppen

$$\begin{gathered}\Omega_{n_1}(P)\Phi(P)/\Phi(P),\\ \Omega_{n_2}(P)\Phi(P)/\Omega_{n_1}(P)\Phi(P),\\ \vdots\\ \Omega_{n_k}(P)\Phi(P)/\Omega_{n_{k-1}}(P)\Phi(P) = P/\Omega_{n_{k-1}}(P)\Phi(P)\end{gathered}$$

der Ordnung 2. Durch Induktion nach k sieht man nun, dass für jeden Automorphismus $\alpha \in \operatorname{Aut}(P)$ der induzierte Automorphismus $\overline{\alpha} \in \operatorname{Aut}(P/\Phi(P))$ ein 2-Element ist. Also ist $\operatorname{Aut}(P)$ eine 2-Gruppe. □

Nun können wir entscheiden, wann ein Fusionssystem auf einer minimal nichtabelschen 2-Gruppe nilpotent ist.

Satz 4.5. *Sei P wie in Lemma 4.2, und sei $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf P. Dann ist $\mathcal{F}$ nilpotent oder $s = 1$ oder $r = s$. Im Fall $r = s \geq 2$ wird $\mathcal{F}$ durch P kontrolliert.*

Beweis. Wir nehmen $s \neq 1$ an. Sei $Q < P$ eine $\mathcal{F}$-essentielle Untergruppe. Da Q auch $\mathcal{F}$-zentrisch ist, gilt $\mathrm{C}_P(Q) = Q$. Dies zeigt, dass Q eine maximale Untergruppe von P sein muss. Da $\operatorname{Aut}(Q)$ keine 2-Gruppe ist, tritt nach den Lemmata 4.2(v) und 4.4 einer der folgenden Fälle ein:

(i) $r = 2$ $(= s)$ und $Q \in \big\{\langle x^2, y, z\rangle, \langle x, y^2, z\rangle, \langle xy, x^2, z\rangle\big\}$.

(ii) $r > s = 2$ und $Q \in \big\{\langle x, y^2, z\rangle, \langle xy, x^2, z\rangle\big\}$.

(iii) $r = s + 1$ und $Q = \langle x^2, y, z\rangle$.

In allen Fällen ist $\Omega(Q) \subseteq \mathrm{Z}(P)$. Wir betrachten nun die Operation von $\operatorname{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ auf $\Omega(Q)$. Wegen $\Omega(Q) \subseteq \mathrm{Z}(P)$ operiert $1 \neq P/Q = \mathrm{N}_P(Q)/\mathrm{C}_P(Q) \cong \operatorname{Aut}_P(Q) \leq \operatorname{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ trivial auf $\Omega(Q)$. Andererseits operiert bekanntlich jeder nichttriviale Automorphismus ungerader Ordnung nichttrivial auf $\Omega(Q)$ (siehe zum Beispiel 8.4.3 in [58]). Also ist der Kern dieser Operation ein nichttrivialer 2-Normalteiler von $\operatorname{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$. Insbesondere ist $\mathrm{O}_2(\operatorname{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)) \neq 1$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $\operatorname{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ eine stark 2-eingebettete Untergruppe besitzt. Folglich gibt es keine $\mathcal{F}$-essentiellen Untergruppen. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3 wie in Satz 3.9. □

Im Fall $r = s = 1$ gibt es bekanntlich nichtnilpotente Fusionssysteme auf P. Im Fall $r = s \geq 2$ kann man nach Lemma 4.3 mit einem geeigneten semidirekten Produkt ein nichtnilpotentes Fusionssystem konstruieren. Wir zeigen nun, dass auch im Fall $s = 1$ ein nichtnilpotentes Fusionssystem auf P existiert.

Lemma 4.6. *Sei P wie in Lemma 4.2 mit $s = 1$. Dann gibt es ein nichtnilpotentes Fusionssystem auf P.*

Beweis. Offenbar können wir $r \geq 2$ annehmen. Wir betrachten ein semidirektes Produkt der Form $A_4 \rtimes C_{2^r}$, wobei A_4 die alternierende Gruppe vom Grad 4 bezeichnet. Sei dafür $H := \langle \widetilde{x} \rangle \cong C_{2^r}$ und $\widetilde{y} := (12)(34) \in A_4$. Sei $\varphi : H \to \operatorname{Aut}(A_4) \cong S_4$, sodass $\varphi_{\widetilde{x}} \in \operatorname{Aut}(A_4)$ die Ordnung 4 hat. Außerdem sei $\varphi_{\widetilde{x}}(\widetilde{y}) := (13)(24)$. Schließlich sei $G := A_4 \rtimes_\varphi H$. Da alle 4-Zyklen in S_4 konjugiert sind, ist G bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wegen $[\widetilde{x}, \widetilde{y}] = (13)(24)(12)(34) = (14)(23)$ ist $\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle \cong P$. Da A_4 nicht 2-nilpotent ist, ist auch G nicht 2-nilpotent. Also ist $\mathcal{F}_G(P)$ ein nichtnilpotentes Fusionssystem auf P. $\square$

Wir beschränken uns nun auf Blöcke.

4.1 Der Fall $r = s > 1$

In diesem Abschnitt sei B ein Block von RG mit Defektgruppe

$$D := \langle x, y \mid x^{2^r} = y^{2^r} = [x, y]^2 = [x, x, y] = [y, x, y] = 1 \rangle$$

für $r \geq 2$. Wegen $|D/\Phi(D)| = 4$ sind 2 und 3 die einzigen Primteiler von $|\operatorname{Aut}(D)|$. Also ist $t(B) \in \{1, 3\}$. Im Fall $t(B) = 1$ ist B nach Satz 4.5 nilpotent. Wir werden daher stets $t(B) = 3$ voraussetzen. Zunächst untersuchen wir die Automorphismengruppe von D.

Lemma 4.7. *Sei $\alpha \in \operatorname{Aut}(D)$ ein Automorphismus der Ordnung 3. Dann ist $z := [x, y]$ der einzige nichttriviale Fixpunkt von α in $\mathrm{Z}(D)$.*

Beweis. Wegen $D' = \langle z \rangle$ bleibt z unter allen Automorphismen von D fest. Da α nichttrivial auf $D/\mathrm{Z}(D)$ operiert, ist $\alpha(x) \in y\,\mathrm{Z}(D) \cup xy\,\mathrm{Z}(D)$. In jedem Fall ist $\alpha(x^2) \neq x^2$. Also ist $\alpha|_{\mathrm{Z}(D)} \in \operatorname{Aut}(\mathrm{Z}(D))$ auch ein Automorphismus der Ordnung 3. Offenbar induziert α dann auch einen Automorphismus der Ordnung 3 auf $\mathrm{Z}(D)/\langle z \rangle \cong C_{2^{r-1}}^2$. Dieser Automorphismus ist aber nach Lemma 3.2 fixpunktfrei. Somit folgt die Behauptung. $\square$

Nun können wir ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von B-Elementen angeben.

Lemma 4.8. *Sei $b_D \in \operatorname{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$ ein Brauer-Korrespondent von B, und für $Q \leq D$ sei b_Q der eindeutig bestimmte Block von $RQ\,\mathrm{C}_G(Q)$ mit $(Q, b_Q) \leq (D, b_D)$. Wir wählen ein Repräsentantensystem $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Z}(D)$ für die Bahnen von $\mathrm{Z}(D)$ unter der Operation von $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(D)}(b_D)$. Mit $\mathcal{T} := \mathcal{S} \cup \{y^i x^{2j} : i, j \in \mathbb{Z},\ i \text{ ungerade}\}$ ist dann*

$$\bigcup_{a \in \mathcal{T}} \left\{ \left(a, b_{\mathrm{C}_D(a)}^{\mathrm{C}_G(a)}\right) \right\}$$

ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von B-Elementen. Dabei gilt

$$|\mathcal{T}| = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 4}{3}.$$

Beweis. In Proposition 2.12.(ii) in [77] ist das gesuchte Repräsentantensystem falsch angegeben. Die prinzipielle Vorgehensweise in dieser Arbeit ist jedoch richtig. Wir werden daher nur skizzieren, wie man den Fehler korrigiert.

Für $Q \in \mathrm{A}(D, b_D)$ ist $\mathrm{C}_D(Q) \subseteq Q$ nach Lemma 1.36(i). Da D minimal nichtabelsch ist, gilt $|D : \mathrm{C}_D(Q)| \le 2$ für alle $Q \le D$. Nach Lemma 1.7 in [76] folgt nun

$$\mathrm{A}(D, b_D) = \mathrm{A}_0(D, b_D) = \big\{D, \langle x, y^2, z\rangle, \langle x^2, y, z\rangle, \langle xy, x^2, z\rangle\big\}.$$

Man kann also $\mathcal{R} = \{D, \langle x^2, y, z\rangle\}$ mit der Bezeichnung aus Abschnitt 1.9 wählen, da die drei maximalen Untergruppen von D in G konjugiert sind. Die erste Behauptung folgt nun aus Satz 1.39. Lemma 4.7 impliziert außerdem

$$|\mathcal{T}| = 2 + \frac{|\mathrm{Z}(D)| - 2}{3} + |\{y^i x^{2j} : i, j \in \mathbb{Z},\ i \text{ ungerade}\}| = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 4}{3}. \qquad \square$$

Ab jetzt schreiben wir $b_a := b_{\mathrm{C}_D(a)}^{\mathrm{C}_G(a)}$ für $a \in \mathcal{T}$. Man kann nun die Differenz $k(B) - l(B)$ bestimmen.

Satz 4.9. *Es gilt*

$$k(B) - l(B) = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 7}{3}.$$

Beweis. Wir untersuchen $l(b_a)$ für $1 \ne a \in \mathcal{T}$.

1. Fall: $a \in \mathrm{Z}(D)$.
Dann ist b_a ein Block mit Defektgruppe D. Außerdem haben b_a und B einen gemeinsamen Brauer-Korrespondenten in $\mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_{\mathrm{C}_G(a)}(D)) = \mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$. Im Fall $a \ne z$ folgt $t(b_a) = 1$ aus Lemma 4.7. Also ist dann b_a nilpotent und $l(b_a) = 1$. Sei nun $a = z$. Nach Satz 1.20 existiert ein Block $\overline{b_z}$ von $\mathrm{C}_G(z)/\langle z\rangle$ mit Defektgruppe $D/\langle z\rangle \cong C_{2^r}^2$ und $l(\overline{b_z}) = l(b_z)$. Nach Theorem 1.5(iv) in [76] ist $t(\overline{b_z}) = t(b_z) = 3$. Also impliziert Satz 3.11 nun $l(b_z) = l(\overline{b_z}) = 3$.

2. Fall: $a \notin \mathrm{Z}(D)$.
Nach Satz 1.39 hat dann b_a Defektgruppe $\mathrm{C}_D(a) = \langle x^2, y, z\rangle =: M$. Für jeden Automorphismus α der Ordnung 3 von D ist $\alpha(M) \ne M$. Da D die Fusion von B-Unterpaaren kontrolliert, ist also $t(b_a) = l(b_a) = 1$.

Die Behauptung folgt schließlich aus Gleichung (1.6). $\square$

Als Nächstes werden wir ein Resultat über die Elementarteiler der Cartanmatrix von B beweisen.

Lemma 4.10. *Die Elementarteiler der Cartanmatrix von B liegen in $\{1, 2, |D|\}$. Die Vielfachheit von 2 ist dabei 2, und die Vielfachheit von $|D|$ ist wie üblich 1. Insbesondere gilt $l(B) \ge 3$.*

Beweis. Sei C die Cartanmatrix von B. Wir verwenden Satz 1.46(iii). Sei dafür $P < D$ mit $|P| \ge 4$ und $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(P))$ ein Brauer-Korrespondent von B mit Defektgruppe $Q \le D$. Brauers erster Hauptsatz impliziert dann $P < Q$. Nach Proposition 1.3 in [76] existiert ein Block $\beta \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P))$ mit $\beta^{\mathrm{N}_G(P)} = b$, sodass höchstens $l(\beta)$ untere Defektgruppen von b ein Konjugiertes von P enthalten. Sei $S \le Q$ eine Defektgruppe von β. Betrachten wir zunächst den Fall $S = D$. Dann ist $P \subseteq \mathrm{Z}(D)$. Wegen $|P| \ge 4$ folgt $l(\beta) = 1$ aus Lemma 4.7. Da P in der (unteren) Defektgruppe Q von b enthalten ist, hat man $m_b^1(P) = m_b(P) = 0$.

Sei nun $S < D$. Insbesondere ist dann S abelsch. Ist S sogar metazyklisch, so folgt $l(\beta) = 1$ und $m_b^1(P) = 0$ wegen $P \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{C}_G(P))$. Nehmen wir nun an, dass S nicht metazyklisch ist. Nach (3C) in [16] ist $x^2 \in \mathrm{Z}(D)$ zu einem Element in $\mathrm{Z}(S)$ konjugiert. Also ist $S \cong C_{2^k} \times C_{2^l} \times C_2$ mit $k \in \{r, r-1\}$ und $1 \le l \le r$. Sind $1, k, l$ paarweise verschieden, so folgt $l(\beta) = 1$ und $m_b^1(P) = 0$ aus Lemma 4.4. Sei nun $k = l$. Jeder Automorphismus von S der Ordnung 3 besitzt dann nur einen nichttrivialen Fixpunkt. Wegen $|P| \ge 4$ folgt daher wieder $l(\beta) = 1$ und $m_b^1(P) = 0$.

Sei nun $S \cong C_{2^k} \times C_2^2$ mit $2 \le k \in \{r-1, r\}$. Nehmen wir zuerst an, dass P nichtzyklisch ist. Dann ist S/P metazyklisch. Ist S/P nicht das Produkt zweier isomorpher zyklischer Gruppen, so folgt $l(\beta) = 1$ und $m_b^1(P) = 0$ aus Satz 1.20. Also können wir $S/P \cong C_2^2$ annehmen. Man überlegt sich leicht, dass dann eine Untergruppe $P_1 \le P$ mit $S/P_1 \cong C_4 \times C_2$ existiert. Also folgt auch in diesem Fall $l(\beta) = 1$ und $m_b^1(P) = 0$ aus Satz 1.20.

Sei schließlich $P = \langle u \rangle$ zyklisch. Dann ist (u, β) ein B-Element. Wegen $|P| \ge 4$ kann u nicht zu z konjugiert sein. Wie im Beweis von Satz 4.9 ist daher $l(\beta) = 1$ und $m_b^1(P) = 0$. Damit folgt nun auch $m_B^1(P) = 0$ nach Satz 1.47. Da P beliebig war, ist die Vielfachheit von $|P|$ als Elementarteiler von C demnach 0.

Nun betrachten wir den Fall $|P| = 2$. Wir schreiben $P = \langle u \rangle \le D$. Wie eben sei $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(P))$ ein Brauer-Korrespondent von B. Dann ist (u, b) ein B-Element. Ist (u, b) nicht zu (z, b_z) konjugiert, so gilt $l(b) = 1$ und $m_b^1(P) = 0$ wie im Beweis von Satz 4.9. Da man P durch ein Konjugiertes ersetzen kann, können wir also $P = \langle z \rangle$ und $(u, b) = (z, b_z)$ annehmen. Dann ist $l(b) = 3$ und D ist eine Defektgruppe von b. Sei nun $\overline{b} \in \mathrm{Bl}(R[\mathrm{N}_G(P)/P])$ der von b dominierte Block. Nach Lemma 3.4 sind dann $1, 1, |D|/2$ die Elementarteiler der Cartanmatrix von $\overline{b}$. Die Elementarteiler der Cartanmatrix von b sind demnach $2, 2, |D|$ nach Satz 1.20. Also ist

$$2 = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}(\mathrm{N}_G(P)),\\ |Q|=2}} m_b^1(Q),$$

wobei $\mathcal{P}(\mathrm{N}_G(P))$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von p-Untergruppen von $\mathrm{N}_G(P)$ ist. Wendet man nun die gleichen Überlegungen auf b anstatt B an, so sieht man $m_b^1(Q) = 0$ für $P \ne Q \le \mathrm{N}_G(P)$ mit $|Q| = 2$. Also ist $2 = m_b^1(P) = m_B^1(P)$, und 2 ist ein zweifacher Elementarteiler von C. □

Um weitere Informationen über die Zahlen $k(B)$ und $l(B)$ zu erlangen, untersuchen wir wie in [76] die verallgemeinerten Zerlegungszahlen von B.

Sei $|G| = 2^a m$ mit $2 \nmid m$. Außerdem sei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $\mathbb{Q}(\zeta_{|G|}) \subseteq K$ gilt. Dann ist $\mathbb{Q}(\zeta_{|G|})|\mathbb{Q}(\zeta_m)$ eine Galoiserweiterung, und wir bezeichnen mit

$$\mathcal{G} := \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\zeta_{|G|})|\mathbb{Q}(\zeta_m)\big)$$

die entsprechende Galoisgruppe. Durch Einschränkung erhält man einen Isomorphismus

$$\mathcal{G} \cong \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\zeta_{2^a})|\mathbb{Q}\big).$$

Insbesondere ist $|\mathcal{G}| = 2^{a-1}$. Für jedes $\gamma \in \mathcal{G}$ existiert eine Zahl $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(\widetilde{\gamma}, |G|) = 1$, $\widetilde{\gamma} \equiv 1 \pmod{m}$ und $\gamma(\zeta_{|G|}) = \zeta_{|G|}^{\widetilde{\gamma}}$. Ist nun (u, b) ein B-Element von G, so definiert man

$$^{\gamma}(u, b) := (u^{\widetilde{\gamma}}, b).$$

Wegen $\mathrm{C}_G(u) = \mathrm{C}_G(u^{\widetilde{\gamma}})$ ist dann auch $^{\gamma}(u, b)$ ein B-Element von G. Auf diese Weise operiert $\mathcal{G}$ auf der Menge der B-Elemente von G. Offenbar induziert diese Operation auch eine Operation auf der Menge der G-Konjugationsklassen von B-Elementen von G.

Durch $^{\gamma}\chi(g) := \chi(g^{\widetilde{\gamma}})$ für $g \in G$ und $\gamma \in \mathcal{G}$ operiert $\mathcal{G}$ auch auf $\operatorname{Irr}(B)$. Zwei Charaktere χ und $^{\gamma}\chi$ nennt man 2-*konjugiert*. Charaktere, die unter dieser Operation festbleiben, heißen 2-*rational*. Ist (u, b) ein B-Element mit $|\langle u \rangle| = 2^k$, so ist $d^u_{\chi\varphi} \in \mathbb{Z}[\zeta_{2^k}]$ für $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ und $\varphi \in \operatorname{IBr}(b)$. Für $\gamma \in \mathcal{G}$ gilt dann

$$\gamma(d^u_{\chi\varphi}) = d^{u^{\widetilde{\gamma}}}_{\chi\varphi} = d^u_{^{\gamma}\chi\varphi}.$$

Dies liefert eine Verbindung zwischen der Operation von $\mathcal{G}$ auf $\operatorname{Irr}(B)$ und auf der Menge der B-Elemente.

Für $u \in \mathcal{T} \setminus \langle z \rangle$ ist $l(b_u) = 1$. Wir schreiben in diesem Fall $\operatorname{IBr}(b_u) =: \{\varphi_u\}$. Dann bilden die Zahlen $\{d^u_{\chi\varphi_u} : \chi \in \operatorname{Irr}(B)\}$ eine Spalte in der verallgemeinerten Zerlegungsmatrix. Wir bezeichnen diese Spalte mit $d(u)$. Sei 2^k die Ordnung von u. Da $\{\zeta^i_{2^k} : i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}[\zeta_{2^k}]$ bildet, existieren eindeutig bestimmte Zahlen $a^u_i(\chi) \in \mathbb{Z}$ mit

$$d^u_{\chi\varphi} = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a^u_i(\chi)\zeta^i_{2^k}.$$

Wir fassen nun die Zahlen $a^u_i(\chi)$ für $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ in der Spalte a^u_i zusammen. Bei geeigneter Anordnung gilt dann

$$d(u) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a^u_i \zeta^i_{2^k}.$$

Aus technischen Gründen erweitern wir die Definition von a^u_i für alle $i \in \mathbb{Z}$ durch

$$a^u_{i+2^{k-1}} := -a^u_i.$$

Wegen $\zeta^{2^{k-1}}_{2^k} = -1$ gilt dann

$$d(u) = \sum_{s \in \mathcal{S}} a^u_s \zeta^s_{2^k}$$

für jedes Repräsentantensystem $\mathcal{S}$ für die Nebenklassen von $2^{k-1}\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$. Für jedes $\gamma \in \mathcal{G}$ ist nun

$$d(u^{\widetilde{\gamma}}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} a^u_s \zeta^{s\widetilde{\gamma}}_{2^k}.$$

Es folgt leicht

$$a^u_s = 2^{1-a} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} d\big(u^{\widetilde{\gamma}}\big)\zeta^{-\widetilde{\gamma}s}_{2^k} \tag{4.1}$$

für $s \in \mathcal{S}$.

Für $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$ sind nach Lemma 4.8 die 2^{r-1} verschiedenen B-Elemente der Form $^{\gamma}(u, b_u) = (u^{\widetilde{\gamma}}, b_u) = (u^{\widetilde{\gamma}}, b_{u^{\widetilde{\gamma}}})$ mit $\gamma \in \mathcal{G}$ paarweise nichtkonjugiert. Sei nun $u \in \mathrm{Z}(D)$ mit

$|\langle u\rangle| = 2^k$ und $1 \le k \le r-1$. Für einen Automorphismus $\alpha \in \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(D)}(b_D)/\,\mathrm{C}_G(D) \le \mathrm{Aut}(D)$ der Ordnung 3 ist dann $\alpha(u) = u$ oder $\alpha(u) \notin \langle u\rangle$. Nach Lemma 4.8 sind also auch die 2^{k-1} verschiedenen B-Elemente der Form ${}^{\gamma}(u, b_u)$ mit $\gamma \in \mathcal{G}$ paarweise nichtkonjugiert sind.

Für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit (v, w) das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Wie in [76] gilt folgendes Lemma.

Lemma 4.11. *Seien $u, v \in \mathcal{T} \setminus \langle z\rangle$ mit $|\langle u\rangle| = 2^k$ und $|\langle v\rangle| = 2^l$. Außerdem seien $i \in \{0, 1, \ldots, 2^{k-1}-1\}$ und $j \in \{0, 1, \ldots, 2^{l-1}-1\}$. Existieren $\gamma \in \mathcal{G}$ und $g \in G$ mit ${}^{g}(u, b_u) = {}^{\gamma}(v, b_v)$, so ist*

$$(a_i^u, a_j^v) = \begin{cases} 2^{d(B)-k+1} & \text{falls } u \in \mathrm{Z}(D) \text{ und } j\widetilde{\gamma} - i \equiv 0 \pmod{2^k} \\ -2^{d(B)-k+1} & \text{falls } u \in \mathrm{Z}(D) \text{ und } j\widetilde{\gamma} - i \equiv 2^{k-1} \pmod{2^k} \\ 2^{d(B)-k} & \text{falls } u \notin \mathrm{Z}(D) \text{ und } j\widetilde{\gamma} - i \equiv 0 \pmod{2^k} \\ -2^{d(B)-k} & \text{falls } u \notin \mathrm{Z}(D) \text{ und } j\widetilde{\gamma} - i \equiv 2^{k-1} \pmod{2^k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Anderenfalls ist $(a_i^u, a_j^v) = 0$. Insbesondere ist $(a_i^u, a_j^v) = 0$ für $k \ne l$.

Beweis. Mit Gleichung (4.1) folgt

$$(a_i^u, a_j^v) = 2^{2(1-a)} \sum_{\gamma,\delta \in \mathcal{G}} \zeta_{2^k}^{-i\widetilde{\gamma}} \zeta_{2^l}^{j\widetilde{\delta}} \big(d(u^{\widetilde{\gamma}}), d(v^{\widetilde{\delta}})\big).$$

Existiert kein $\gamma \in \mathcal{G}$, sodass (u, b_u) und ${}^{\gamma}(v, b_v)$ konjugiert sind, so ist $\big(d(u^{\widetilde{\gamma}}), d(v^{\widetilde{\delta}})\big) = 0$ für alle $\gamma, \delta \in \mathcal{G}$ nach den Orthogonalitätsrelationen für verallgemeinerte Zerlegungszahlen. Damit hat man auch $(a_i^u, a_j^v) = 0$. Nehmen wir nun ${}^{g}(u, b_u) = {}^{\gamma_0}(v, b_v)$ für ein $g \in G$ und ein $\gamma_0 \in \mathcal{G}$ an. Dann erhält man

$$(a_i^u, a_j^v) = 2^{2(1-a)} 2^{a-k} (d(u), d(u)) \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \zeta_{2^k}^{(j\widetilde{\gamma_0}-i)\widetilde{\gamma}}.$$

Im Fall $j\widetilde{\gamma_0} - i \not\equiv 0 \pmod{2^{k-1}}$ hat $\zeta_{2^k}^{j\widetilde{\gamma_0}-i}$ mindestens die Ordnung 4. Da für $t \in \mathbb{N}$ das 2^t-te Kreisteilungspolynom die Form $X^{2^{t-1}} + 1$ hat, folgt in diesem Fall $(a_i^u, a_j^v) = 0$. Für $j\widetilde{\gamma_0} - i \equiv 0 \pmod{2^k}$ ist $\zeta_{2^k}^{j\widetilde{\gamma_0}-i} = 1$, und für $j\widetilde{\gamma_0} - i \equiv 2^{k-1} \pmod{2^k}$ ist $\zeta_{2^k}^{j\widetilde{\gamma_0}-i} = -1$. Nun ergibt sich mit den Orthogonalitätsrelationen für verallgemeinerte Zerlegungszahlen die Behauptung. □

Wir benutzen nun einige Bezeichnungen und Sätze aus [17]. Zunächst sei angemerkt, dass in diesem Artikel konjugierte B-Elemente von G miteinander identifiziert werden. Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ und (u, b) ein B-Element von G. Wir bezeichnen die 2-Sektion von u mit S. Jedes Element $v \in S$ ist dann zu einem Element der Form uw mit $w \in \mathrm{C}_G(u)_{2'}$ konjugiert. Für $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ definieren wir nun

$$\chi^{(u,b)}(v) := \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(b)} d^u_{\chi\varphi} \varphi(w).$$

Ist v auch zu uw' mit $w' \in \mathrm{C}_G(u)_{2'}$ konjugiert, so sind w und w' in $\mathrm{C}_G(u)$ konjugiert. Dies zeigt, dass $\chi^{(u,b)}(v)$ nicht von der Wahl von w abhängt. Man erhält somit eine

Klassenfunktion auf S. Ist das B-Element (u', b') zu (u, b) in G konjugiert, so sieht man leicht, dass $\chi^{(u,b)}$ und $\chi^{(u',b')}$ auf S übereinstimmen.

Wie in [17] definieren wir nun

$$m_{\chi\psi}^{(u,b)} := |\mathrm{C}_G(u)|^{-1} \sum_{g \in \mathrm{C}_G(u)_{2'}} \chi^{(u,b)}(ug)\overline{\psi}^{(u,b)}(ug)$$

für ein B-Element (u, b) und $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(B)$. Dabei ist

$$\begin{aligned} \overline{\psi}^{(u,b)}(ug) &= \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(b)} d^u_{\overline{\psi}\varphi}\varphi(g) = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(b)} \overline{d^u_{\psi\overline{\varphi}}\overline{\varphi}(g)} \\ &= \overline{\sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(b)} d^u_{\psi\varphi}\varphi(g)} = \overline{\psi^{(u,b)}(ug)} \end{aligned}$$

das komplex Konjugierte von $\psi^{(u,b)}(ug)$. Die Zahlen $m_{\chi\psi}^{(u,b)}$ werden in der Literatur oft als „contributions“ bezeichnet. Für konjugierte B-Elemente (u, b) und (u', b') ist wieder $m_{\chi\psi}^{(u,b)} = m_{\chi\psi}^{(u',b')}$. Ist C_b die Cartanmatrix von b und Q_b der zu (u, b) gehörende Teil der vollständigen Zerlegungsmatrix von B, so erhält man durch

$$\left(m_{\chi\psi}^{(u,b)}\right)_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(B)} = Q_b C_b^{-1} \overline{Q_b}^{\mathrm{T}} \tag{4.2}$$

eine alternative Beschreibung der Zahlen $m_{\chi\psi}^{(u,b)}$. Diese Beziehung werden wir oft verwenden.

Nun kann man auch die Lemmata (6.B) und (6.E) aus [59] auf unseren Fall übertragen.

Lemma 4.12. *Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ und $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$. Genau dann hat χ Höhe 0, wenn*

$$\sum_{i=0}^{2^{r-1}-1} a_i^u(\chi) \tag{4.3}$$

ungerade ist.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass χ die Höhe 0 hat. Nach Corollary 2 in [21] ist

$$d^u_{\chi\varphi_u}\overline{d^u_{\chi\varphi_u}} = |M| m_{\chi\chi}^{(u,b_u)} \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$$

und damit $d^u_{\chi\varphi_u} \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$. Mit den Bezeichnungen von oben ist $\zeta_{2^a} \in R$ eine Nullstelle des Polynoms $X^{2^a} - 1$. Betrachtet man dieses Polynom über F, so gilt $X^{2^a} - 1 = (X-1)^{2^a}$ wegen $\operatorname{char} F = 2$. Dies zeigt $\zeta_{2^a} \equiv 1 \pmod{(\pi)}$. Somit ist die Summe (4.3) ungerade.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass die Summe (4.3) ungerade ist. Wie eben ist dann $|M| m_{\chi\chi}^{(u,b_u)} \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$. Wegen $|D : M| = 2$ folgt nun $h(\chi) = 0$ aus (5G) in [17]. □

Lemma 4.13. *Sei $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z \rangle$ der Ordnung 2^k. Dann gilt für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$:*

(i) $2^{h(\chi)} \mid a_i^u(\chi)$ *für* $i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1$,

(ii) $\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi) \equiv 2^{h(\chi)} \pmod{2^{h(\chi)+1}}$.

Beweis. Sei $\psi \in \mathrm{Irr}(B)$ ein Charakter der Höhe 0. Wir bezeichnen mit ν die Fortsetzung der 2-adischen Bewertung auf K. Da $(\langle u\rangle, b_u)$ ein Hauptpaar ist, folgt nun

$$h(\chi) = \nu\bigl(|D|m_{\chi\psi}^{(u,b_u)}\bigr)$$

aus (5H) in [17]. Mit Gleichung (4.2) ergibt sich weiter

$$h(\chi) = \nu(d_{\chi\varphi_u}^u) + \nu\bigl(\overline{d_{\psi\varphi_u}^u}\bigr).$$

Aus (5H) erhält man außerdem

$$\nu(d_{\psi\varphi_u}^u) + \nu\bigl(\overline{d_{\psi\varphi_u}^u}\bigr) = \nu\bigl(|d_{\psi\varphi_u}^u|^2\bigr) = \nu\bigl(|D|m_{\psi\psi}^{(u,b_u)}\bigr) = 0.$$

Also ist $\nu(\overline{d_{\psi\varphi_u}^u}) = 0$ und $h(\chi) = \nu(d_{\chi\varphi_u}^u)$. Somit hat $2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u \in \mathbb{Q}(\zeta_{2^k}) \subseteq \mathbb{Q}_2(\zeta_{2^k})$ die Bewertung 0. Aus der algebraischen Zahlentheorie weiß man nun, dass $\mathbb{Z}_2[\zeta_{2^k}]$ der Bewertungsring von $\mathbb{Q}_2(\zeta_{2^k})$ ist (siehe zum Beispiel Satz II.7.13(iii) in [73]). Also ist $2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u \in \mathbb{Z}_2[\zeta_{2^k}]$. Da die Koeffizienten von $2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u$ rationale Zahlen sind, gilt schließlich auch $2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u \in \mathbb{Z}[\zeta_{2^k}]$. Daraus folgt Teil (i).

Wegen

$$2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u = 2^{-h(\chi)}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi)\zeta_{2^k}^i \equiv 2^{-h(\chi)}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi) \pmod{(\pi)}$$

ist

$$\nu\Bigl(2^{-h(\chi)}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi) - 2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u\Bigr) > 0.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\nu\Bigl(2^{-h(\chi)}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi)\Bigr) &= \nu\Bigl(2^{-h(\chi)}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi) - 2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u + 2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u\Bigr)\\ &= \nu\Bigl(2^{-h(\chi)}d_{\chi\varphi_u}^u\Bigr) = 0\end{aligned}$$

und die Behauptung (ii). □

Aus Lemma 4.13(ii) folgt $d_{\chi\varphi_u}^u \neq 0$ für $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z\rangle$. Wählt man $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z\rangle$ mit $|\langle u\rangle| = 2$, so ergibt sich

$$k(B) \le \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i}k_i(B) \le |D|. \tag{4.4}$$

Insbesondere ist Brauers $k(B)$-Vermutung erfüllt. Aus Theorem 3.1 in [87] folgt außerdem $k_0(B) \le |D|/2 = |D : D'|$. Also ist auch die Olsson-Vermutung erfüllt. Man kann damit Gleichung (4.4) zu

$$|D| \ge k_0(B) + 4(k(B) - k_0(B)) = 4k(B) - 3k_0(B) \ge 4k(B) - \frac{3|D|}{2}$$

und

$$\frac{5\cdot 2^{2(r-1)}+16}{3} \le k(B) - l(B) + l(B) = k(B) \le \frac{5|D|}{8} = 5\cdot 2^{2(r-1)}$$

verbessern. Wir werden die Ungleichung weiter verbessern. Sei dafür $\overline{b_z}$ der von b_z dominierte Block in $\mathrm{Bl}(R[\mathrm{C}_G(z)/\langle z\rangle])$. Dann hat $\overline{b_z}$ Defektgruppe $D/\langle z\rangle \cong C_{2^r}^2$. Nach Satz 3.11 ist daher die Cartanmatrix von $\overline{b_z}$ zur Matrix

$$\overline{C} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{2r}+2 & 2^{2r}-1 & 2^{2r}-1 \\ 2^{2r}-1 & 2^{2r}+2 & 2^{2r}-1 \\ 2^{2r}-1 & 2^{2r}-1 & 2^{2r}+2 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Die Cartanmatrix von b_z ist also zur Matrix $2\overline{C}$ äquivalent (siehe Satz 1.20). Aus der Ungleichung $(**)$ in [63] folgt nun

$$k(B) \le 2\frac{2^{2r}+8}{3} = \frac{|D|+16}{3}.$$

(Man beachte, dass der Beweis von Theorem A in [63] auch für b_z anstelle von B richtig bleibt. Siehe auch Lemma 5.4 in Kapitel 5.)

Corollary (6D) in [18] zeigt zusätzlich

$$k_i(B) = 0 \text{ für } i \ge 4.$$

Damit sind die Höhen der Charaktere in $\mathrm{Irr}(B)$ unabhängig von r beschränkt. Wir bemerken außerdem, dass Alperins Gewichts-Vermutung zur Aussage

$$l(B) = l(b)$$

für den Brauer-Korrespondenten $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(D))$ von B äquivalent ist (siehe Consequence 5 in [3]). Wegen $z \in \mathrm{Z}(\mathrm{N}_G(D))$ kann man dann $l(B) = l(b) = 3$ wie im Beweis von Satz 4.9 zeigen (dies folgt auch aus Satz 1.23). Mit Satz 4.9 würde dann

$$k(B) = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 16}{3}$$

folgen.

Wir beschreiben eine Situation, in der diese Aussagen zutreffen.

Satz 4.14. *Ist* $\mathrm{O}_2(G) \ne 1$, *so gilt*

$$k(B) = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 16}{3}, \qquad k_0(B) \ge \frac{2^{2r}+8}{3} \qquad \text{und} \qquad l(B) = 3.$$

Beweis. Sei $1 \ne Q := \mathrm{O}_2(G)$. Dann ist $Q \subseteq D$. Wir zeigen zunächst $z \in \mathrm{Z}(G)$. In den Fällen $Q \in \{D, D'\}$ ist dies offenbar erfüllt. Sei daher $D' \ne Q < D$. Insbesondere ist Q abelsch. Wir betrachten ein B-Unterpaar (Q, b_Q). Wie im Beweis von Lemma 4.8 ist $\mathcal{R} = \{D, \langle x^2, y, z\rangle\}$ mit der Bezeichnung aus Abschnitt 1.9. Also hat (Q, b_Q) Typ D oder $M := \langle x^2, y, z\rangle$ (siehe Satz 1.37). Insbesondere ist D oder M eine Defektgruppe von b_Q. Im Fall $D \in \mathrm{Def}(b_Q)$ ist $D \subseteq \mathrm{C}_G(Q)$ und $Q \subseteq \mathrm{Z}(D)$. Nach Lemma 4.7 ist dann b_Q nilpotent.

Betrachten wir nun den Fall $M \in \mathrm{Def}(b_Q)$. Da D die Fusion von B-Unterpaaren kontrolliert, ist dann $t(b_Q) = 1$ (siehe 2. Fall im Beweis von Satz 4.9). Also ist b_Q auch in diesem Fall nilpotent. In beiden Fällen ist B also eine Erweiterung eines nilpotenten Blocks von $\mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(Q))$. In dieser Situation haben Külshammer und Puig gezeigt, dass man B durch einen Block mit normaler Defektgruppe ersetzen kann (siehe [62]). Insbesondere können wir auch hier $z \in \mathrm{Z}(G)$ annehmen.

Also ist $B = b_z$, und die Formeln für $k(B)$ und $l(B)$ folgen unmittelbar. Sei wie bisher $\overline{b_z}$ der von b_z dominierte Block in $\mathrm{Bl}(R[G/\langle z\rangle])$. Die Charaktere in $\mathrm{Irr}(\overline{b_z})$ haben dann nach Inflation immer noch die Höhe 0. Also folgt $k_0(B) = k_0(b_z) \ge k(\overline{b_z}) = (2^{2r} + 8)/3$. $\square$

Wegen $\mathrm{N}_G(D) \subseteq \mathrm{C}_G(z)$ ist B mit den Bezeichnungen aus [61] ein sogenannter „centrally controlled block“. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass dann ein Epimorphismus $\mathrm{Z}(B) \to \mathrm{Z}(b_z)$ existiert. Dabei muss man B (bzw. b_z) als Block von FG (bzw. $F\,\mathrm{C}_G(z)$) auffassen. Es wird vermutet, dass die Blöcke B und b_z in dieser Situation Morita-äquivalent sind. Für die relativ ähnliche Defektgruppe Q_8 wurde dies tatsächlich in [52] gezeigt. In diesem Zusammenhang ist auch die Arbeit [25] erwähnenswert. Dort wurde unter anderem gezeigt, dass es zwischen zwei Blöcken mit der gleichen Quaternionengruppe als Defektgruppe und der gleichen Fusion von Unterpaaren stets eine perfekte Isometrie gibt. Da die Gruppe D einige Gemeinsamkeiten mit einer Quaternionengruppe hat, ist es also auch denkbar, dass eine perfekte Isometrie zwischen B und b_z existiert. Da die verwendeten Methoden im Allgemeinen nicht ausreichen, dies zu zeigen, werden wir uns nun auf zwei Spezialfälle beschränken.

4.1.1 Blöcke mit maximalem Defekt

In diesem Abschnitt habe B maximalen Defekt, das heißt, D ist eine 2-Sylowgruppe von G. Dies schließt insbesondere den Fall ein, dass B der Hauptblock von G ist. Wir werden schnell sehen, dass G dann auflösbar sein muss.

Satz 4.15. *Hat B maximalen Defekt, so ist G auflösbar. Insbesondere ist Alperins Gewichts-Vermutung erfüllt, und es gilt*

$$k(B) = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 16}{3} \qquad \textit{und} \qquad l(B) = 3.$$

Beweis. Nach dem Satz von Feit und Thompson können wir $\mathrm{O}_{2'}(G) = 1$ annehmen. Wir wenden nun den Z*-Satz an. Sei dafür $g \in G$ mit ${}^g z \in D$. Da alle Involutionen von D zentral sind, gilt sogar ${}^g z \in \mathrm{Z}(D)$. Nach Burnsides Fusionssatz existiert ein $h \in \mathrm{N}_G(D)$ mit ${}^h z = {}^g z$. (Für Hauptblöcke würde dies auch aus der Tatsache folgen, dass D die Fusion kontrolliert.) Wegen $D' = \langle z\rangle$ ist also ${}^g z = z$. Der Z*-Satz impliziert nun $z \in \mathrm{Z}(G)$. Offenbar ist $D/\langle z\rangle \cong C_{2^r}^2$ eine 2-Sylowgruppe von $G/\langle z\rangle$. Nach den im Abschnitt 3.1 zitierten Sätzen ist also $G/\langle z\rangle$ und damit auch G auflösbar (Theorem 1 in [15]). Die zweite Behauptung folgt aus den obigen Bemerkungen. $\square$

Die Darstellungstheorie für auflösbare Gruppen ist sehr weit entwickelt. So weiß man zum Beispiel, dass man B durch einen Block in einer Gruppe mit „einfacherer Struktur“ ersetzen kann (siehe Theorem X.1.2 in [32] für Details). Wir werden für die Berechnung von $k_i(B)$ jedoch nur elementarere Sätze verwenden. Bekanntlich gilt auch die Alperin-McKay-Vermutung für auflösbare Gruppen (siehe [75]). Für die Bestimmung von $k_0(B)$ kann man also annehmen, dass D normal in G ist. Wie in Abschnitt 3.1 kann man nun Satz 1.23 anwenden. Sei dafür $L := D \rtimes C_3$. Dann ist $B \cong (RL)^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Also ist $k_0(B)$ gerade die Anzahl der irreduziblen Charaktere von L mit ungeradem Grad. Wir bestimmen diese Zahl.

Satz 4.16. *Hat B maximalen Defekt, so gilt*

$$k_0(B) = \frac{2^{2r}+8}{3} \qquad \text{und} \qquad k_1(B) = k(B) - k_0(B) = \frac{2^{2(r-1)}+8}{3}.$$

Beweis. Nach Clifford ist jeder irreduzible Charakter von L eine Fortsetzung oder eine Induktion eines Charakters von D. Es genügt also zu zählen, wie viele irreduzible Charaktere von L durch lineare Charaktere von D entstehen. Bekanntlich sind die linearen Charaktere von D genau die Inflationen von $\operatorname{Irr}(D/D')$. Nach Lemma 3.2 und Brauers Permutationslemma zerfallen diese unter der Operation von L in den trivialen Charakter und Bahnen der Länge 3. Die drei Inflationen von $\operatorname{Irr}(L/D)$ sind die Fortsetzungen des trivialen Charakters von D. Alle anderen linearen Charaktere von D bleiben nach Induktion irreduzibel. Die Charaktere in einer Bahn liefern dabei den gleichen Charakter von L. Also ist

$$k_0(B) = 3 + \frac{|D/D'|-1}{3} = \frac{2^{2r}+8}{3}.$$

Die Alperin-McKay-Vermutung überträgt sich nicht ohne Weiteres auf die Zahlen $k_i(B)$ für $i \geq 1$. Nach Theorem 1.4 in [69] gilt aber $k_i(B) = 0$ für $i \geq 2$. Damit ergibt sich

$$k_1(B) = k(B) - k_0(B) = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)}+16}{3} - \frac{2^{2r}+8}{3} = \frac{2^{2(r-1)}+8}{3}. \qquad \square$$

Man sieht also sofort, dass Brauers Höhe-Null-Vermutung erfüllt ist. Auch die bisher noch nicht erwähnte Dade-Vermutung gilt für alle auflösbaren Gruppen (siehe [88]).

Als zweiten Spezialfall betrachten wir $r = 2$, allerdings wieder für allgemeine Blöcke.

4.1.2 Der Spezialfall $r = 2$

In diesem Fall ist $|D| = 32$, $k(B) \geq 12$ und $l(B) \geq 3$. Bekanntlich ist $k_0(B) \neq 0$ durch 4 teilbar. Im Fall $k_0(B) = 4$ liefert die Ungleichung (4.4) einen Widerspruch. Also ist $k_0(B) \geq 8$.

Alle (verallgemeinerten) Zerlegungszahlen liegen in $\mathbb{Z}[i]$, wobei $i := \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ist. Sei $\gamma \in \mathcal{G}$, sodass die Einschränkung von γ auf $\mathbb{Q}(\zeta_{2^a})$ die komplexe Konjugation ist. Dann vertauscht γ die B-Elemente (y, b_y) und (y^3, b_y) sowie (yx^2, b_{yx^2}) und (y^3x^2, b_{yx^2}). Alle anderen B-Elemente werden von γ festgelassen. Nach Brauers Permutationslemma (siehe Lemma 1 in [13]) bewirkt die Operation von γ auf $\operatorname{Irr}(B)$ ebenfalls zwei Bahnen der Länge 2. Also enthält a_1^y höchstens vier von 0 verschiedene Einträge. Wegen $(a_1^y, a_1^y) = 8$ besteht a_1^y aus zwei Einträgen ± 2 und sonst nur Nullen. Nach Lemma 4.12 ist $d^y_{\chi\varphi_u} \neq 0$ für alle Charaktere $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ mit $h(\chi) = 0$ Aus $(a_0^u, a_0^u) = 8$ folgt daher andererseits $k_0(B) \leq 10$. Also folgt $k_0(B) = 8$. Insbesondere ist Brauers Höhe-Null-Vermutung erfüllt. Offenbar ist auch $k_i(B) = 0$ für $i \geq 2$. Dies liefert $4 \leq k_1(B) \leq 6$ und $12 \leq k(B) \leq 14$. Für Charaktere $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ der Höhe 1 gilt offenbar $d^{x^2}_{\chi\varphi_{x^2}} = a_0^{x^2}(\chi) = \pm 2$. Also ist

$$32 - 4k_1(B) = \sum_{\substack{\chi \in \operatorname{Irr}(B),\\ h(\chi)=0}} \left(d^{x^2}_{\chi\varphi_{x^2}}\right)^2 \equiv 0 \pmod 8.$$

Dies zeigt $k_1(B) \in \{4, 6\}$ und $k(B) \in \{12, 14\}$. Wir zeigen (unter erheblichen Aufwand), dass der Fall $k_1(B) = 6$ (und $k(B) = 14$) nicht eintreten kann.

Satz 4.17. *Für $r = 2$ gilt*

$$k(B) = 12, \qquad k_0(B) = 8, \qquad k_1(B) = 4, \qquad l(B) = 3.$$

Beweis. Wir nehmen indirekt $k_1(B) = 6$ (und $k(B) = 14$) an. Zunächst bestimmen wir die verallgemeinerten Zerlegungszahlen $d^u_{\chi\varphi}$ für $u \neq 1$. Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt dann auch die Gestalt der gewöhnlichen Zerlegungsmatrix und der Cartanmatrix zumindest bis auf Transformation mit einer invertierbaren Matrix. Die Berechnung der Determinante der Cartanmatrix liefert schließlich den gewünschten Widerspruch. Auf Grund dieses Vorgehens können wir Zeilen und Spalten der vollständigen Zerlegungsmatrix sowohl vertauschen als auch mit komplexen Zahlen vom Betrag 1 multiplizieren. Wir werden daher eine möglichst einfache Gestalt der Matrizen anstreben.

Sei $\mathrm{IBr}(b_z) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, und sei $\overline{b_z} \in \mathrm{Bl}(R[\mathrm{C}_G(z)/\langle z\rangle])$ der von b_z dominierte Block. Dann hat $\overline{b_z}$ Defektgruppe $D/\langle z\rangle \cong C_4^2$. Nach Satz 3.11 ist die Cartanmatrix von $\overline{b_z}$ zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

äquivalent. Also hat die Cartanmatrix C_z von b_z bis auf Äquivalenz die Form

$$\widetilde{C}_z := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Sei $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ mit $C_z = S^{\mathrm{T}} \widetilde{C}_z S$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} D_z &:= (d^z_{\chi\varphi_i})_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(B), \\ i \in \{1,2,3\}}} \in \mathbb{Z}^{k(B) \times 3}, \\ \widetilde{D}_z &:= (\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_i})_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(B), \\ i \in \{1,2,3\}}} := D_z S^{-1} \in \mathbb{Z}^{k(B) \times 3}. \end{aligned}$$

Dann ist $\widetilde{D}_z^{\mathrm{T}} \widetilde{D}_z = S^{-\mathrm{T}} D_z^{\mathrm{T}} D_z S^{-1} = \widetilde{C}_z$. Für $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z\rangle$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ ist $d^u_{\chi\varphi_u} \neq 0$ nach Lemma 4.13(ii). Also haben die Spalten $\{\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} : \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ und $\{\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} : \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ jeweils bei geeigneter Anordnung die Form

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Dabei seien die Vorzeichen unabhängig voneinander. Die Inverse von $\widetilde{C}_z$ ist

$$\frac{1}{32} \begin{pmatrix} 11 & -5 & -1 \\ -5 & 11 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aus Gleichung (4.2) folgt

$$M_z := \left(m^{(z,b_z)}_{\chi\psi}\right)_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(B)} = D_z C_z^{-1} D_z^{\mathrm{T}} = D_z S^{-1} \widetilde{C}_z^{-1} S^{-\mathrm{T}} D_z^{\mathrm{T}} = \widetilde{D}_z \widetilde{C}_z^{-1} \widetilde{D}_z^{\mathrm{T}}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} 32 m^{(z,b_z)}_{\chi\psi} = {} & 11 \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_1} + 11 \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_2} + 3 \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_3} - 5 \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_2} \\ & - 5 \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_1} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_3} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_1} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_3} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} \widetilde{d}^z_{\psi\varphi_2} \end{aligned}$$

für $\chi, \psi \in \operatorname{Irr}(B)$. Wegen $\sum_{\chi\in\operatorname{Irr}(B)} \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1}\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} = 2$ und $k_0(B) = 8$ existiert ein Charakter $\psi_1 \in \operatorname{Irr}(B)$ mit $h(\psi_1) = 0$ und $\widetilde{d}^z_{\psi_1\varphi_1} = \widetilde{d}^z_{\psi_1\varphi_2} = 0$. Für einen beliebigen Charakter $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ gilt dann

$$h(\chi) = \nu\big(32m^{(z,b_z)}_{\chi\psi_1}\big) = \nu\big(3\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3}\widetilde{d}^z_{\psi_1\varphi_3} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1}\widetilde{d}^z_{\psi_1\varphi_3} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2}\widetilde{d}^z_{\psi_1\varphi_3}\big) \tag{4.5}$$

nach (5H) in [17]. Für $\chi = \psi_1$ erhält man, dass $\widetilde{d}^z_{\psi_1\varphi_3}$ ungerade ist. Offenbar muss dann $\widetilde{d}^z_{\psi_1\varphi_3} = \pm 1$ sein, und Gleichung (4.5) vereinfacht sich zu

$$h(\chi) = \nu\big(3\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} - \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2}\big). \tag{4.6}$$

Existiert ein Charakter $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ mit $h(\chi) = 1$ und $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} = \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} = 0$, so ist $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} = \pm 2$ nach (4.6). In diesem Fall hätte $\widetilde{D}_z$ aber eine Nullzeile im Widerspruch zu (4.6). Also gilt:

$$h(\chi) = 1 \Longleftrightarrow \big(\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} \neq 0 \ \vee \ \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} \neq 0\big).$$

Für $\chi \in \operatorname{Irr}(B)$ mit $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} = \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} = \pm 1$ folgt

$$1 = h(\chi) = \nu\big(3\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} \mp 2\big)$$

aus (4.6). Im Fall $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} = \pm 2$ wäre $\nu\big(3\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} \mp 2\big) \geq 2$. Also ist $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} = 0$. Bei geeigneter Nummerierung und Vorzeichenwahl erhält man somit

$$\widetilde{D}_z = \begin{pmatrix} 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die einzelnen Punkte für Nullen stehen. Die ersten sechs Zeilen korrespondieren dabei zu den Charakteren der Höhe 1 und die folgenden acht Zeilen zu den Charakteren der Höhe 0.

Nach Lemma 4.13 ist

$$d^u_{\chi\varphi_u} = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } h(\chi) = 0 \\ \pm 2 & \text{falls } h(\chi) = 1 \end{cases}$$

für $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z \rangle$. Für die nächsten zwei Spalten der verallgemeinerten Zerlegungsmatrix gibt es also folgende drei Möglichkeiten:

$$
\begin{array}{ccccc}
(I) & & (II) & & (III) \\
\begin{pmatrix}
1 & . & 1 & 2 & 2 \\
1 & . & 1 & -2 & -2 \\
1 & 1 & . & 2 & 2 \\
1 & 1 & . & -2 & -2 \\
. & 1 & 1 & 2 & -2 \\
. & 1 & 1 & -2 & 2 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & -1 & 1 \\
. & . & 1 & -1 & 1 \\
. & . & 1 & -1 & 1 \\
. & . & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix} & , &
\begin{pmatrix}
1 & . & 1 & 2 & 2 \\
1 & . & 1 & -2 & -2 \\
1 & 1 & . & 2 & -2 \\
1 & 1 & . & -2 & 2 \\
. & 1 & 1 & 2 & 2 \\
. & 1 & 1 & -2 & -2 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & -1 & 1 \\
. & . & 1 & -1 & 1 \\
. & . & 1 & -1 & 1 \\
. & . & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix} & , &
\begin{pmatrix}
1 & . & 1 & 2 & 2 \\
1 & . & 1 & -2 & 2 \\
1 & 1 & . & 2 & -2 \\
1 & 1 & . & -2 & -2 \\
. & 1 & 1 & 2 & 2 \\
. & 1 & 1 & -2 & 2 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & 1 & -1 \\
. & . & 1 & -1 & -1 \\
. & . & 1 & -1 & -1 \\
. & . & 1 & -1 & -1 \\
. & . & 1 & -1 & -1
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Bildet man die Matrix (I') (bzw. (II') und (III')) aus den letzten acht Zeilen der Matrix (I) (bzw. (II) und (III)), so spannen die Spalten von (I'), (II') und (III') den gleichen Raum auf. Offenbar kann man die Zeilen 7–10 und die Zeilen 11–14 jeweils beliebig permutieren. Außerdem kann man die Zeilen 7–10 in ihrer Gesamtheit mit den Zeilen 11–14 tauschen. Dabei muss man gegebenenfalls Spalten mit -1 multiplizieren, und die ersten sechs Zeilen geeignet permutieren. Andererseits können wir Zeilen nicht mehr mit -1 multiplizieren. Diese Bemerkungen werden wir ab jetzt verwenden.

Wir bestimmen nun die Zahlen $d^u_{\chi\varphi_u}$ für $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D) = \{y, y^3, yx^2, y^3x^2\}$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Nach den Überlegungen zu Beginn des Abschnitts existieren vier paarweise verschiedene Charaktere $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \mathrm{Irr}(B)$ mit

$$a_1^{yx^i}(\chi_j) = -a_1^{y^3x^i}(\chi_j) = \begin{cases} \pm 2 & \text{falls } j \in \{i+1, i+2\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i \in \{0, 2\}$ und $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dabei seien die Vorzeichen unabhängig voneinander.

Sei nun $u \in \{y, y^3, yx^2, y^3x^2\}$ beliebig. Nehmen wir an, dass ein Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $h(\chi) = 1$ und $d^u_{\chi\varphi_u} \neq 0$ existiert. Nach Gleichung (4.2) und (5G) in [17] ist dann

$$\nu\big(a_0^u(\chi)^2 + a_1^u(\chi)^2\big) = \nu\big(d^u_{\chi\varphi_u}\overline{d^u_{\chi\varphi_u}}\big) = \nu\big(16m^{(u,b_u)}_{\chi\chi}\big) > 0. \tag{4.7}$$

Man sieht aber leicht, dass dies den Orthogonalitätsrelationen widerspricht. Also ist $d^u_{\chi\varphi_u} = 0$ für alle Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ der Höhe 1. Nach früheren Bemerkungen müssen wir für die weitere Berechnung also nicht zwischen den Matrizen (I), (II) und (III) unterscheiden. Nach Lemma 4.12 ist $a_0^u(\chi) + a_1^u(\chi)$ für $h(\chi) = 0$ stets ungerade. Da $a_1^u(\chi)$ immer gerade ist, muss dann $a_0^u(\chi) = \pm 1$ gelten. Wegen $(a_0^u, a_0^u) = 8$ besteht a_0^u daher aus acht Einträgen ± 1 und sechs Einträgen 0. Für die letzten acht Zeilen der Spalten $d(y)$ und $d(yx^2)$ erhält man somit folgende Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cc} (a) & (b) \\ \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 1-2i & -1 \\ -1 & 1+2i \\ -1 & 1-2i \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 1-2i & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1+2i \\ 1 & 1-2i \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

In Kombination mit (I), (II) und (III) erhält man die sechs Fälle $(Ia), (Ib), \ldots, (IIIb)$. Wir betrachten exemplarisch den Fall (Ia). Man überprüft leicht, dass die Zeilen folgender Matrix in diesem Fall den Orthogonalraum der bereits berechneten Spalten der vollständigen Zerlegungsmatrix aufspannen:

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & -1 & . & -1 \\ . & 1 & . & -1 & . & 1 & . & . & . & . & . & -1 & . & -1 \\ . & . & . & . & 2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & . & 2 & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Q})$, sodass $Q^{\mathrm{T}} S$ die gewöhnliche Zerlegungsmatrix von B ist. Durch Betrachtung der Spalten 1, 2, 7, 11 und 13 von Q sieht man, dass S nur ganzzahlige Einträge hat. Insbesondere ist $\det S \in \mathbb{Z}$ (man kann sogar $\det S = \pm 1$ zeigen). Sei C die Cartanmatrix von B. Dann ist

$$\det C = \det S^{\mathrm{T}} Q Q^{\mathrm{T}} S = (\det S)^2 \det QQ^{\mathrm{T}} \geq \det QQ^{\mathrm{T}} = 512.$$

Nach Lemma 4.10 sind die Elementarteiler von C aber $1, 1, 2, 2, 32 = |D|$. Völlig analog führt man die verbleibenden Fälle zum Widerspruch. $\square$

Damit haben wir die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt bestätigt. Die Länge des Beweises zeigt aber, dass man für $r \geq 3$ sicher neue Methoden benötigen wird. Nachdem wir nun die Zahlen $k(B)$, $k_i(B)$ und $l(B)$ kennen, können wir einige verallgemeinerte Zerlegungszahlen ausrechnen. Viele Argumente aus dem Beweis von Satz 4.17 bleiben nach wie vor richtig. So haben die Spalten $\{\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} : \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ und $\{\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} : \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ bei geeigneter Anordnung immer noch die Form

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Nehmen wir $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} \neq 0 \Leftrightarrow \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} \neq 0$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ an. Dann existiert ein Charakter $\chi_1 \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\widetilde{d}^z_{\chi_1\varphi_1} = -\widetilde{d}^z_{\chi_1\varphi_2} = \pm 1$. Aus Gleichung (4.6) folgt dann

$$h(\chi_1) = \nu\big(\widetilde{d}^z_{\chi_1\varphi_3}\big).$$

Insbesondere ist $\widetilde{d}^z_{\chi_1\varphi_3} \neq 0$. Damit sind die Bedingungen

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_3} = 2$$

aber nicht gleichzeitig erfüllbar. Es gibt daher sechs Charaktere χ mit $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} = \pm 1$ oder $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} = \pm 1$.

Nach Lemma 4.13 haben die Spalten $d(u)$ für $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z \rangle$ die Form

$$(\pm 3, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 2, \pm 2, \pm 2, \pm 2)^{\mathrm{T}}.$$

Nehmen wir nun an, dass ein Charakter $\chi_1 \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $h(\chi_1) = 1$ und $\widetilde{d}^z_{\chi_1\varphi_1} = \widetilde{d}^z_{\chi_1\varphi_2} = 0$ existiert. Dann ist $\widetilde{d}^z_{\chi_1\varphi_3} = \pm 2$. Dies zeigt, dass χ_1 der einzige Charakter mit diesen Eigenschaften ist. Man erhält leicht

$$\widetilde{D}_z = \begin{pmatrix} 1 & . & 1 \\ 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & . \\ . & . & 2 \\ . & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

bei geeigneter Anordnung und Vorzeichenwahl. Insbesondere haben die zwei Paare von 2-konjugierten Charakteren die Höhe 0. Außerdem sind alle Cartaninvarianten c_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ von B größer als 2.

Nehmen wir jetzt an, dass alle Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $\widetilde{d}^z_{\chi\varphi_1} = \widetilde{d}^z_{\chi\varphi_2} = 0$ die Höhe 0 haben. Für $\widetilde{D}_z$ gibt es dann im Wesentlichen die Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & . & 2 \\ 1 & . & . \\ 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} . & . & . & 1 & . & \cdots & . \\ . & . & 1 & . & . & \cdots & . \\ 1 & . & . & . & . & \cdots & . \\ . & 1 & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & -1 & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & . & \ddots & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ . & -1 & . \\ . & . & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & . & 2 \\ 1 & . & . \\ 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

genügt es für die weitere Berechnung nur die erste Matrix betrachten. Nehmen wir diesmal $a_1^u(\chi) \neq 0$ für ein $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$ und einen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $h(\chi) = 1$ an. Ergänzen wir eine Spalte $d(v)$ mit $v \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z \rangle$ zu $\widetilde{D}_z$, so ergibt sich nur die Möglichkeit

$$\begin{pmatrix} 1 & . & 1 & 2 \\ 1 & . & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ . & 1 & 1 & 2 \\ . & 1 & 1 & 2 \\ . & . & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da es aber noch eine weitere Spalte $d(v')$ mit $v' \in \mathcal{T} \cap \mathrm{Z}(D) \setminus \{1, z, v\}$ geben muss, kann dieser Fall nicht eintreten. Also haben die zwei Paare von 2-konjugierten Charakteren wieder die Höhe 0. Auf die gleiche Weise sieht man, dass die Cartaninvarianten c_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ auch in diesem Fall größer als 2 sein müssen.

Satz 4.18. *In* $\mathrm{Irr}(B)$ *gibt es zwei Paare* 2*-konjugierter Charaktere der Höhe* 0*. Die verbleibenden Charaktere sind* 2*-rational.*

Bestimmen wir schließlich die Cartanmatrix C von B bis auf Äquivalenz. Nach Lemma 4.10 sind $2, 2, 32$ die Elementarteiler von C. Also hat

$$\widetilde{C} := (\widetilde{c}_{ij}) := \frac{1}{2} C \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$$

die Elementarteiler $1, 1, 16$. Da $\mathrm{ggT}(\widetilde{c}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq 3)$ jeden Elementarteiler teilt, ist $\mathrm{ggT}(\widetilde{c}_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq 3) = 1$. Die Abbildung

$$q(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i,j=1}^{3} \widetilde{c}_{ij} x_i x_j \qquad \text{für } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

ist eine positiv definite ternäre *quadratische Form* (siehe zum Beispiel [100]).

Nehmen wir zunächst an, dass $\widetilde{c}_{ii}$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$ ungerade ist. Dann sind auch die Koeffizienten $\{\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{22}, \widetilde{c}_{33}, 2\widetilde{c}_{12}, 2\widetilde{c}_{13}, 2\widetilde{c}_{23}\}$ der quadratischen Form teilerfremd. In diesem Fall sagt man: q ist *primitiv*. Außerdem ist $\Delta := -4 \det \widetilde{C} = -64$ die *Diskriminante* von q. Der Tabelle [72] entnimmt man nun, dass $\widetilde{C}$ zu einer der folgenden Matrizen äquivalent ist:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(Es ist bekannt, dass C bzw. $\widetilde{C}$ selbst nicht die Form $\left(\begin{smallmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{smallmatrix}\right)$ mit $C_1 \in \mathbb{Z}$ und $C_2 \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ haben kann. Für äquivalente Matrizen ist dies jedoch nicht ausgeschlossen. Siehe Kapitel 5.) Man rechnet leicht nach, dass nur die letzten drei Matrizen die richtigen Elementarteiler haben. Da die Cartaninvarianten c_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ größer als 2 sein müssen, kann nur die letzte Matrix in Frage kommen. Wir führen auch diesen Fall zum Widerspruch. Für die Zerlegungsmatrix gibt es dann die Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} 1 & . & 1 \\ 1 & . & 1 \\ 1 & . & . \\ 1 & . & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & -1 \\ . & . & 1 \\ . & . & 1 \\ . & . & 1 \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & . & 2 \\ 1 & . & . \\ 1 & . & . \\ 1 & . & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \\ . & . & 1 \\ . & . & 1 \\ . & . & 1 \end{pmatrix},$$

wobei Reihenfolge und Vorzeichen unabhängig von $\widetilde{D}_z$ gewählt sind. Durch geeignete Spaltenoperationen und Permutation sowie Vorzeichenwechsel der Zeilen kann man wieder beide Matrizen ineinander überführen. Man beachte, dass dabei die letzten vier Zeilen nicht permutiert werden müssen. Betrachten wir daher nur die erste Möglichkeit. Ist $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ ein Charakter der Höhe 1, so ergibt sich $32m_{\chi\chi}^{(1,B)} = 4$. Außerdem gilt $32m_{\chi\chi}^{(z,b_z)} = 12$ unabhängig davon, welcher Fall für $\widetilde{D}_z$ eintritt. Für $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle z \rangle$ hat man wieder $32m_{\chi\chi}^{(u,b_u)} = 4$. Insgesamt ist also

$$32 = \sum_{u \in \mathcal{T}} 32m_{\chi\chi}^{(u,b_u)} = 24 + 4a_0^y(\chi)^2 + 4a_0^{yx^2}(\chi)^2$$

nach (5B) in [17]. Gleichung (4.7) zeigt aber, dass $a_0^u(\chi)$ für $u \in \{y, yx^2\}$ stets gerade ist.

Dieser Widerspruch zeigt schließlich, dass $\widetilde{c}_{11}$, $\widetilde{c}_{22}$ und $\widetilde{c}_{33}$ gerade sind. Dann erhält man durch

$$q(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \widetilde{c}_{ij} x_i x_j \qquad \text{für } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

eine primitive quadratische Form mit Diskriminante $\Delta = -8$. Mit Hilfe der Tabelle [71] ist nun folgender Satz bewiesen.

Satz 4.19. *Die Cartanmatrix von B ist zu C_z und damit zu*

$$\widetilde{C}_z = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

äquivalent.

4.2 Der Fall $r > s = 1$

Sei nun B ein nichtnilpotenter Block von RG mit Defektgruppe

$$D := \langle x, y \mid x^{2^r} = y^2 = [x, y]^2 = [x, x, y] = [y, x, y] = 1 \rangle$$

mit $r \geq 2$. Wie bisher verwenden wir die Bezeichnung $z := [x, y]$. Dann ist $\mathrm{Aut}(D)$ eine 2-Gruppe und $t(B) = 1$.

4.2.1 Bestimmung von $k(B)$, $k_i(B)$ und $l(B)$

Wir beginnen wieder damit, ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von B-Elementen zu bestimmen.

Lemma 4.20. *Sei $b_D \in \mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_G(D))$ ein Brauer-Korrespondent von B. Für $Q \le D$ sei $b_Q \in \mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ mit $(Q, b_Q) \le (D, b_D)$. Mit $\mathcal{T} := \mathrm{Z}(D) \cup \{x^i y^j : i, j \in \mathbb{Z},\ i \text{ ungerade}\}$ ist*

$$\bigcup_{a \in \mathcal{T}} \left\{ \left(a, b_{\mathrm{C}_D(a)}^{\mathrm{C}_G(a)}\right) \right\}$$

ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von B-Elementen. Dabei gilt $|\mathcal{T}| = 2^{r+1}$.

Beweis. Im Fall $r = 2$ folgt die Behauptung aus Proposition 2.14 in [77]. Für $r \ge 3$ funktioniert die Argumentation völlig analog. Olsson gibt hier jedoch fälschlicherweise Proposition 2.11 der gleichen Arbeit an (der Fehler steckt bereits in Lemma 2.8). Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.9 gilt in jedem Fall $\mathcal{R} = \mathrm{A}_0(D, b_D) = \{D, \langle x, z\rangle, \langle xy, z\rangle, \langle x^2, y, z\rangle\}$. Die zu $\langle x^2, y, z\rangle$ korrespondierenden B-Elemente erfüllen jedoch nicht die Bedingung in Satz 1.39. □

Wir schreiben wieder $b_a := b_{\mathrm{C}_D(a)}^{\mathrm{C}_G(a)}$ für $a \in \mathcal{T}$.

Lemma 4.21. *Sei $P \cong C_{2^s} \times C_2^2$ mit $s \in \mathbb{N}$, und sei α ein Automorphismus von P der Ordnung 3. Dann ist $\mathrm{C}_P(\alpha) \cong C_{2^s}$.*

Beweis. Wir schreiben $P = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle$ mit $|\langle a\rangle| = 2^s$. Bekanntlich ist der Kern der Einschränkungsabbildung $\mathrm{Aut}(P) \to \mathrm{Aut}(P/\Phi(P))$ eine 2-Gruppe. Wegen $|\mathrm{Aut}(P/\Phi(P))| = |\mathrm{GL}(3, 2)| = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ ist daher $|\mathrm{Aut}(P)|$ genau einmal durch 3 teilbar. Insbesondere ist jeder Automorphismus von P der Ordnung 3 zu α oder α^{-1} konjugiert. Also können wir $\alpha(a) = a$, $\alpha(b) = c$ und $\alpha(c) = bc$ annehmen. Dann ist offenbar $\mathrm{C}_P(\alpha) = \langle a\rangle \cong C_{2^s}$. □

Nun analysieren wir die Zahlen $l(b)$ für ein B-Element (u, b). Der Fall $r = 2$ muss dabei gesondert betrachtet werden, da D in diesem Fall eine elementarabelsche maximale Untergruppe der Ordnung 8 enthält.

Lemma 4.22. *Es existiert ein Element $c \in \mathrm{Z}(D)$ der Ordnung 2^{r-1} mit $l(b_a) = 1$ für alle $a \in \mathcal{T} \setminus \langle c\rangle$.*

Beweis.
1. Fall: $a \in \mathrm{Z}(D)$.
Dann ist $b_a = b_D^{\mathrm{C}_G(a)}$ ein Block mit Defektgruppe D und Brauer-Korrespondent $b_D \in \mathrm{Bl}(RD\,\mathrm{C}_{\mathrm{C}_G(a)}(D))$. Sei $M := \langle x^2, y, z\rangle \cong C_{2^{r-1}} \times C_2^2$. Da B nichtnilpotent ist, existiert ein Element $\alpha \in \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)$, sodass $\overline{\alpha} := \alpha\,\mathrm{C}_G(M) \in \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)$ die Ordnung $q \in \{3, 7\}$ hat. Wir schließen zunächst den Fall $q = 7$ aus. In diesem Fall ist $r = 2$, und $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)$ ist zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(M) \cong \mathrm{GL}(3, 2)$ isomorph. Wegen

$$(M, {}^d b_M) = {}^d(M, b_M) \le {}^d(D, b_D) = (D, b_D)$$

für alle $d \in D$ ist $D \subseteq \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)$. Da $\mathrm{GL}(3,2)$ einfach ist, ergibt sich

$$|\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)| \in \{2\cdot 7,\ 2^3\cdot 3\cdot 7\}.$$

Im ersten Fall ist die 7-Sylowgruppe $\langle\overline{\alpha}\rangle \le \mathrm{GL}(3,2)$ normal in $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)$. Nach Sylow ist aber $|\mathrm{GL}(3,2) : \mathrm{N}_{\mathrm{GL}(3,2)}(\langle\overline{\alpha}\rangle)| = 8$. Also ist $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M) \cong \mathrm{GL}(3,2)$. Nach Satz 1.56 kann dann $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)$ keine stark 2-eingebettete Untergruppe enthalten (das kann man natürlich auch „per Hand“ zeigen). Dieser Widerspruch zeigt schließlich $q = 3$.

Da $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)$ eine stark 2-eingebettete Untergruppe enthält, ist

$$\mathrm{O}_2\big(\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)\big) = 1.$$

Wie im Beweis von Lemma 4.21 ist $|\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)|$ genau einmal durch 3 teilbar. Betrachtet man nun die (treue) Operation von $\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)$ auf seinen 2-Sylowgruppen, so sieht man leicht, dass

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M) \cong S_3$$

gilt. Nach Lemma 4.21 existiert ein Element $c := x^{2i}y^jz^k \in \mathrm{C}_M(\alpha)$ $(i,j,k \in \mathbb{Z})$ der Ordnung 2^{r-1}. Nehmen wir an, dass j ungerade ist. Wegen $x\alpha x \equiv x\alpha x^{-1} \equiv \alpha^{-1} \pmod{\mathrm{C}_G(M)}$ ist dann

$$\begin{aligned}\alpha(x^{2i}y^jz^{k+1})\alpha^{-1} &= \alpha x(x^{2i}y^jz^k)x^{-1}\alpha^{-1} = x\alpha^{-1}(x^{2i}y^jz^k)\alpha x^{-1}\\ &= x(x^{2i}y^jz^k)x^{-1} = x^{2i}y^jz^{k+1}.\end{aligned}$$

Dies widerspricht aber Lemma 4.21. Damit haben wir gezeigt, dass j gerade ist. Also gilt $c \in \mathrm{Z}(D)$. Für $a \notin \langle c\rangle$ ist dann $\alpha \notin \mathrm{C}_G(a)$ und $l(b_a) = 1$. Im Fall $a \in \langle c\rangle$ ist $\alpha \in \mathrm{C}_G(a)$, und b_a ist nichtnilpotent. Hier können wir also noch keine Aussage über $l(b_a)$ treffen.

2. Fall: $a \notin \mathrm{Z}(D)$.
Wie üblich ist dann b_a ein Block mit Defektgruppe $\mathrm{C}_D(a) = \langle \mathrm{Z}(D), a\rangle =: M$ und Brauer-Korrespondent b_M. Im Fall $M \cong C_{2^r}\times C_2$ ist daher $l(b_a) = 1$. Nehmen wir nun $M \cong C_{2^{r-1}} \times C_2^2$ an. Wie im ersten Fall sei $\alpha \in \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)$, sodass $\alpha\,\mathrm{C}_G(M) \in \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M)/\,\mathrm{C}_G(M)$ die Ordnung 3 hat. Wegen $a \notin \mathrm{Z}(D)$ ist dann $\alpha \notin \mathrm{C}_G(a)$ und $t(b_a) = l(b_a) = 1$. $\square$

Ab jetzt schreiben wir $\mathrm{IBr}(b_a) =: \{\varphi_a\}$ für $a \in \mathcal{T} \setminus \langle c\rangle$. Sei (u,b) ein B-Element. Wie in Abschnitt 4.1 definieren wir die Spalten a_i^u. Für $u \in \mathrm{Z}(D)$ der Ordnung $2^k > 1$ sind nach Lemma 4.20 die 2^{k-1} verschiedenen B-Elemente der Form ${}^{\gamma}(u,b) = (u^{\widetilde{\gamma}}, b_u) = (u^{\widetilde{\gamma}}, b_{u^{\widetilde{\gamma}}})$ mit $\gamma \in \mathcal{G}$ paarweise nichtkonjugiert (auch für $l(b) > 1$). Sei nun $u := x^iy^j$ mit $i,j \in \mathbb{Z}$ und i ungerade. Für $\gamma \in \mathcal{G}$ sind dann $u^{\widetilde{\gamma}}$ und $x^{i\widetilde{\gamma}}y^j$ in D konjugiert. Sind also (u,b_u) und ${}^{\gamma}(u,b_u)$ konjugiert, so folgt $x^i = x^{i\widetilde{\gamma}}$ und $u = u^{\widetilde{\gamma}}$. Daher sind auch in diesem Fall die 2^{r-1} verschiedenen B-Elemente der Form ${}^{\gamma}(u,b)$ mit $\gamma \in \mathcal{G}$ paarweise nichtkonjugiert. Also überträgt sich auch Lemma 4.11 in entsprechender Form. Insbesondere gilt zum Beispiel $(a_i^u, a_i^u) = 4$ für $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$ und $i = 0,\ldots,2^{r-1}-1$. Wegen $|D : M| = 2$ funktioniert auch der Beweis von Lemma 4.12 in dieser Situation, und wir können dieses Ergebnis hier ohne weiteren Kommentar verwenden. Schließlich überträgt sich auch Lemma 4.13 in folgender Form.

Lemma 4.23. *Sei $u \in \mathrm{Z}(D)$ mit $l(b_u) = 1$. Hat u die Ordnung 2^k, so gilt für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$:*

(i) $2^{h(\chi)} \mid a_i^u(\chi)$ *für* $i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1$,

(ii) $\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} a_i^u(\chi) \equiv 2^{h(\chi)} \pmod{2^{h(\chi)+1}}$.

Da stets eine Involution $u \in \mathrm{Z}(D)$ mit $l(b_u) = 1$ existiert, erhält man

$$k(B) \le \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i} k_i(B) \le |D| \tag{4.8}$$

wie im Fall $r = s \ge 2$. Theorem 3.1 in [87] impliziert außerdem wieder

$$k_0(B) \le 2^{r+1}. \tag{4.9}$$

Nun können wir die Zahlen $k(B)$, $k_i(B)$ und $l(B)$ berechnen.

Satz 4.24. *Es gilt*

$$k(B) = 5 \cdot 2^{r-1} = |\mathrm{Cl}(D)|, \quad k_0(B) = 2^{r+1} = |D : D'|, \quad k_1(B) = 2^{r-1}, \quad l(B) = 2.$$

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach r. Sei also zunächst $r = 2$. Sei außerdem $c \in \mathrm{Z}(D)$ wie in Lemma 4.22. Wir bestimmen $l(b_c)$. Nehmen wir zunächst $c = z$ an. Sind α und M wie im Beweis von Lemma 4.22 definiert, so operiert α nichttrivial auf $M/\langle z\rangle \cong C_2^2$. Im Gegensatz dazu operiert x trivial auf $M/\langle z\rangle$. Dies widerspricht aber $x\alpha x^{-1}\alpha \in \mathrm{C}_G(M)$. Also ist $c \in \{x^2, x^2z\}$ und $D/\langle c\rangle \cong D_8$. Man kann also Satz 2.3 anwenden. Sei dazu

$$M_1 := \begin{cases} \langle x, z\rangle & \text{falls } c = x^2 \\ \langle xy, z\rangle & \text{falls } c = x^2 z \end{cases}.$$

Dann ist $M \ne M_1 \cong C_4 \times C_2$ und $\overline{M} := M/\langle c\rangle \cong C_2^2 \cong M_1/\langle c\rangle =: \overline{M_1}$. Sei β der von b_c dominierte Block von $R\overline{\mathrm{C}_G(c)} := R[\mathrm{C}_G(c)/\langle c\rangle]$. Nach Theorem 1.5 in [76] ist dann

$$3 \bigm| |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_{\overline{\mathrm{C}_G(c)}}(\overline{M})}(\beta_{\overline{M}}) / \mathrm{C}_{\overline{\mathrm{C}_G(c)}}(\overline{M})|$$

und

$$3 \nmid |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_{\overline{\mathrm{C}_G(c)}}(\overline{M_1})}(\beta_{\overline{M_1}}) / \mathrm{C}_{\overline{\mathrm{C}_G(c)}}(\overline{M_1})|.$$

Dabei sind $(\overline{M}, \beta_{\overline{M}})$ und $(\overline{M_1}, \beta_{\overline{M_1}})$ Unterpaare bzgl. β. Aus Theorem 2 in [19] folgt nun $l(b_c) = l(\beta) = 2$. Zusammen mit Lemma 4.22 ergibt sich

$$k(B) \ge 1 + k(B) - l(B) = 9.$$

Bekanntlich ist $k_0(B)$ stets durch 4 teilbar. Aus den Gleichungen (4.8) und (4.9) folgt also $k_0(B) = 8$. Außerdem gilt

$$d^z_{\chi\varphi_z} = a_0^z(\chi) = \pm 1$$

für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $h(\chi) = 0$. Dies impliziert $4k_1(B) \le |D| - k_0(B) = 8$. Daraus folgt leicht $k_1(B) = l(B) = 2$.

Sei nun $r \ge 3$. Da z kein Quadrat in D ist, gilt $z \notin \langle c\rangle$. Wir wählen $a \in \langle c\rangle$ mit $|\langle a\rangle| = 2^k$. Im Fall $k = r-1$ ist $l(b_a) = 2$ wie im Induktionsanfang. Sei also $k < r-1$. Man überlegt sich leicht, dass dann $D/\langle a\rangle$ den gleichen Isomorphietyp wie D hat, wobei man jedoch r durch

$r-k$ ersetzen muss. Für $k \geq 1$ erhält man daher $l(b_a) = 2$ aus der Induktionsvoraussetzung und Satz 1.20. Also ist

$$k(B) \geq 1 + k(B) - l(B) = 2^{r+1} + 2^{r-1} - 1.$$

Die Gleichung (4.8) liefert nun

$$\begin{aligned}2^{r+2} - 4 = 2^{r+1} + 4(2^{r-1} - 1) &\leq k_0(B) + 4(k(B) - k_0(B)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i} k_i(B) \leq |D| = 2^{r+2}.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt unmittelbar. □

4.2.2 Bestimmung der verallgemeinerten Zerlegungszahlen

Mit diesen Informationen über B kann man nun auch einige Aussagen über die verallgemeinerten Zerlegungszahlen machen. Sei $c \in \mathrm{Z}(D)$ wie in Lemma 4.22 und $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle c \rangle$ mit $|\langle u \rangle| = 2^k$. Dann ist $(a_i^u, a_i^u) = 2^{r+3-k}$ und $2 \mid a_i^u(\chi)$ für $h(\chi) = 1$ und $i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1$. Dies impliziert

$$|\{\chi \in \mathrm{Irr}(B) : a_i^u(\chi) \neq 0\}| \leq 2^{r+3-k} - 3|\{\chi \in \mathrm{Irr}(B) : h(\chi) = 1,\ a_i^u(\chi) \neq 0\}|.$$

Außerdem existiert für jeden Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ ein $i \in \{0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ mit $a_i^u(\chi) \neq 0$. Also ist

$$\begin{aligned}k(B) &\leq \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(B), \\ a_i^u(\chi) \neq 0}} 1 \leq \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \left(2^{r+3-k} - 3 \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(B), \\ h(\chi)=1, \\ a_i^u(\chi) \neq 0}} 1 \right) = |D| - 3 \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(B), \\ h(\chi)=1, \\ a_i^u(\chi) \neq 0}} 1 \\ &\leq |D| - 3k_1(B) = k(B).\end{aligned}$$

Für jeden Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ existiert also ein $i(\chi) \in \{0, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$ mit

$$d^u_{\chi\varphi_u} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^k}^{i(\chi)} & \text{falls } h(\chi) = 0 \\ \pm 2\zeta_{2^k}^{i(\chi)} & \text{falls } h(\chi) = 1 \end{cases}.$$

Insbesondere hat man

$$d^u_{\chi\varphi_u} = a_0^u(\chi) = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } h(\chi) = 0 \\ \pm 2 & \text{falls } h(\chi) = 1 \end{cases}$$

für $k = 1$.

Wie bereits erwähnt wurde, ist $(a_i^u, a_i^u) = 4$ für $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$ und $i = 0, \ldots, 2^{r-1} - 1$. Wäre nur ein Eintrag in a_i^u ungleich 0, so wäre a_i^u nicht zu a_0^z orthogonal. Also hat die Spalte a_i^u bei geeigneter Anordnung die Form

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Dabei seien die Vorzeichen unabhängig voneinander. Aus Lemma 4.12 folgt außerdem

$$|d^u_{\chi\varphi_u}| = 1$$

für $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$ und $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ mit $h(\chi) = 0$. Insbesondere ist $d^u_{\chi\varphi_u} = 0$ für Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ der Höhe 1. Bei geeigneter Anordnung hat man also

$$a_i^u(\chi_j) = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } j - 4i \in \{1, \ldots, 4\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } d^u_{\chi_j\varphi_u} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^r}^{[\frac{j-1}{4}]} & \text{falls } 1 \le j \le k_0(B) \\ 0 & \text{falls } k_0(B) < j \le k(B) \end{cases}$$

für $i = 0, \ldots, 2^{r-1} - 1$. Dabei seien $\chi_1, \ldots, \chi_{k_0(B)}$ die Charaktere der Höhe 0.

Sei nun $\mathrm{IBr}(b_c) =: \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Wir untersuchen die verallgemeinerten Zerlegungszahlen $d^c_{\chi\varphi_1}, d^c_{\chi\varphi_2} \in \mathbb{Z}[\zeta_{2^{r-1}}]$. Nach (4C) in [17] ist zumindest $d^c_{\chi\varphi_1} \neq 0$ oder $d^c_{\chi\varphi_2} \neq 0$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$. Wir wissen bereits aus dem Beweis von Satz 4.24, dass der von b_c dominierte Block $\overline{b_c} \in \mathrm{Bl}(R[\mathrm{C}_G(c)/\langle c \rangle])$ die Defektgruppe D_8 hat. Die Tabelle am Ende von [31] zeigt nun, dass die Cartanmatrix von $\overline{b_c}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

annimmt. Wir bezeichnen diese Möglichkeiten als „ersten“ und „zweiten“ Fall. In beiden Fällen werden wir die Zahlen $d^c_{\chi\varphi_i}$ für $i = 1, 2$ ausrechnen. Die Cartanmatrix von b_c ist

$$2^{r-1}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ oder } 2^{r-1}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

je nachdem welcher Fall eintritt. Die Inversen dieser Matrizen sind

$$2^{-r-2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \text{ bzw. } 2^{-r-2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mit Gleichung (4.2) erhält man

$$|D| m^{(c,b_c)}_{\chi\psi} = 3 d^c_{\chi\varphi_1}\overline{d^c_{\psi\varphi_1}} - 4\big(d^c_{\chi\varphi_1}\overline{d^c_{\psi\varphi_2}} + d^c_{\chi\varphi_2}\overline{d^c_{\psi\varphi_1}}\big) + 8 d^c_{\chi\varphi_2}\overline{d^c_{\psi\varphi_2}}$$

bzw.

$$|D| m^{(c,b_c)}_{\chi\psi} = 3 d^c_{\chi\varphi_1}\overline{d^c_{\psi\varphi_1}} - 2\big(d^c_{\chi\varphi_1}\overline{d^c_{\psi\varphi_2}} + d^c_{\chi\varphi_2}\overline{d^c_{\psi\varphi_1}}\big) + 4 d^c_{\chi\varphi_2}\overline{d^c_{\psi\varphi_2}}. \tag{4.10}$$

Für einen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ der Höhe 0 gilt daher

$$0 = h(\chi) = \nu\big(|D| m^{(c,b_c)}_{\chi\chi}\big) = \nu\big(3 d^c_{\chi\varphi_1}\overline{d^c_{\chi\varphi_1}}\big) = \nu(d^c_{\chi\varphi_1})$$

nach (5H) in [17]. Insbesondere ist $d^c_{\chi\varphi_1} \neq 0$. Definiert man nun $c_i^j \in \mathbb{Z}^{k(B)}$ durch

$$d^c_{\chi\varphi_j} = \sum_{i=0}^{2^{r-2}-1} c_i^j(\chi)\zeta^i_{2^{r-1}}$$

für $j = 1, 2$, so gilt

$$(c_i^1, c_j^1) = \begin{cases} \delta_{ij} 16 & \text{im ersten Fall} \\ \delta_{ij} 8 & \text{im zweiten Fall} \end{cases}, \quad (c_i^1, c_j^2) = \begin{cases} \delta_{ij} 8 & \text{im ersten Fall} \\ \delta_{ij} 4 & \text{im zweiten Fall} \end{cases}, \quad (c_i^2, c_j^2) = \delta_{ij} 6$$

wie in Lemma 4.11. (Da die 2^{r-2} B-Elemente der Form ${}^\gamma(c, b_c)$ für $\gamma \in \mathcal{G}$ paarweise nichtkonjugiert sind, kann man tatsächlich wie in Lemma 4.11 argumentieren.) Im zweiten Fall folgt daher sofort

$$d^c_{\chi_i\varphi_1} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^{r-1}}^{[\frac{i-1}{8}]} & \text{falls } 1 \le i \le k_0(B) \\ 0 & \text{falls } k_0(B) < i \le k(B) \end{cases} \quad \text{(zweiter Fall)}$$

bei geeigneter Nummerierung. Dabei seien $\chi_1, \ldots, \chi_{k_0(B)}$ die Charaktere der Höhe 0. Im ersten Fall gilt hingegen

$$1 = h(\psi) = \nu\big(|D|m^{(c,b_c)}_{\chi\psi}\big) = \nu\big(3d^c_{\chi\varphi_1}\overline{d^c_{\psi\varphi_1}}\big) = \nu(d^c_{\psi\varphi_1})$$

nach (5G) in [17] für $h(\psi) = 1$ und $h(\chi) = 0$. Wie in Lemma 4.23 gilt damit auch $2 \mid c^1_i(\psi)$ für $h(\psi) = 1$ und $i = 0, \ldots, 2^{r-2} - 1$. Völlig analog zum Fall $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle c \rangle$ erhält man nun

$$d^c_{\chi\varphi_1} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^{r-1}}^{i(\chi)} & \text{falls } h(\chi) = 0 \\ \pm 2\zeta_{2^{r-1}}^{i(\chi)} & \text{falls } h(\chi) = 1 \end{cases} \quad \text{(erster Fall)} \tag{4.11}$$

für geeignete Indizes $i(\chi) \in \{0, \ldots, 2^{r-2} - 1\}$. Wegen $(c^2_i, c^2_j) = \delta_{ij}6$ hat c^2_i in beiden Fällen die Form

$$(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \text{ oder } (\pm2, \pm1, \pm1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Wir werden sehen, dass die zweite Form in beiden Fällen ausgeschlossen ist. Im zweiten Fall existiert für jeden Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ der Höhe 1 ein $i \in \{0, \ldots, 2^{r-2} - 1\}$ mit $c^2_i(\chi) \ne 0$. Dann ist also

$$d^c_{\chi_i\varphi_2} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^{r-1}}^{[\frac{i-1}{4}]} & \text{falls } 1 \le i \le 2^r \\ 0 & \text{falls } 2^r < i \le k_0(B) \\ \pm\zeta_{2^{r-1}}^{[\frac{i-k_0(B)-1}{2}]} & \text{falls } k_0(B) < i \le k(B) \end{cases} \quad \text{(zweiter Fall)},$$

wobei $\chi_1, \ldots, \chi_{k_0(B)}$ die Charaktere der Höhe 0 sind. Nun zum ersten Fall. Wegen $(c^1_i, c^2_j) = \delta_{ij}8$ muss ±2 mindestens zweimal in jeder Spalte c^1_i für $i = 0, \ldots, 2^{r-2} - 1$ auftreten. Offenbar sind dann genau zwei Einträge ±2. Man kann daher Gleichung (4.11) verbessern zu

$$d^c_{\chi_i\varphi_1} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^{r-1}}^{[\frac{i-1}{8}]} & \text{falls } 1 \le i \le k_0(B) \\ \pm2\zeta_{2^{r-1}}^{[\frac{i-k_0(B)-1}{2}]} & \text{falls } k_0(B) < i \le k(B) \end{cases} \quad \text{(erster Fall)}.$$

Damit folgt leicht

$$d^c_{\chi_i\varphi_2} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^{r-1}}^{[\frac{i-1}{4}]} & \text{falls } 1 \le i \le 2^r \\ 0 & \text{falls } 2^r < i \le k_0(B) \\ \pm\zeta_{2^{r-1}}^{[\frac{i-k_0(B)-1}{2}]} & \text{falls } k_0(B) < i \le k(B) \end{cases} \quad \text{(erster Fall)}.$$

Also sind die Zahlen $d^c_{\chi\varphi_2}$ unabhängig davon, welcher Fall eintritt. Völlig analoge Resultate erhält man für die Zahlen $d^u_{\chi\varphi_i}$ mit $\langle u \rangle = \langle c \rangle$.

Um auch Aussagen über die gewöhnlichen Zerlegungszahlen zu gewinnen, untersuchen wir nun die Cartanmatrix von B.

4.2.3 Bestimmung der Cartanmatrix

Lemma 4.25. *Die Elementarteiler der Cartanmatrix von B sind 2^{r-1} und $|D|$.*

Beweis. Sei C die Cartanmatrix von B. Wegen $l(B) = 2$ genügt es zu zeigen, dass 2^{r-1} mindestens einmal als Elementarteiler von C auftritt. Wir wählen dafür ein B-Element (u, b) mit $|\langle u \rangle| = 2^{r-1}$ und $l(b) = 2$. Sei $b_1 := b^{\mathrm{N}_G(\langle u \rangle)}$. Offenbar hat dann auch b_1 Defektgruppe D, und es gilt $l(b_1) = 2$. Außerdem ist $u^{2^{r-2}} \in \mathrm{Z}(\mathrm{N}_G(\langle u \rangle))$. Sei $\overline{b_1}$ der von b_1 dominierte Block in $\mathrm{Bl}(R[\mathrm{N}_G(u)/\langle u^{2^{r-2}} \rangle])$. Dann hat $\overline{b_1}$ Defektgruppe $D/\langle u^{2^{r-2}} \rangle$. Wir argumentieren nun durch Induktion nach r. Sei also zunächst $r = 2$. Dann ist $b = b_1$ und $D/\langle u^{2^{r-2}} \rangle = D/\langle u \rangle \cong D_8$. Nach Proposition (5G) in [19] hat die Cartanmatrix von $\overline{b}$ die Elementarteiler 1 und 8. Also sind $2 = 2^{r-1}$ und $16 = |D|$ die Elementarteiler der Cartanmatrix von b. Die Behauptung folgt nun aus den Sätzen 1.47 und 1.46(iii).

Sei nun $r > 2$ und die Behauptung für $r-1$ bereits bewiesen. Dann hat die Cartanmatrix von $\overline{b_1}$ die Elementarteiler 2^{r-2} und $|D|/2$. Die Aussage folgt nun wie im Induktionsanfang. $\square$

Wir werden die Cartanmatrix C von B bis auf Äquivalenz bestimmen.

Aus Lemma 4.25 folgt leicht, dass alle Einträge von C durch 2^{r-1} teilbar sind. Wir betrachten daher $\widetilde{C} := 2^{1-r}C$. Dann ist $\det \widetilde{C} = 8$, und die Elementarteiler von $\widetilde{C}$ sind 1 und 8. Schreiben wir

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

so entspricht $\widetilde{C}$ der positiv definiten binären quadratischen Form $q(x_1, x_2) := c_1x_1^2 + 2c_2x_1x_2 + c_3x_2^2$. Offenbar ist $\mathrm{ggT}(c_1, c_2, c_3) = 1$. Reduziert man die Einträge in $\widetilde{C}$ modulo 2, so entsteht eine Matrix vom Rang 1 (dies ist die Vielfachheit des Elementarteilers 1). Also muss c_1 oder c_3 ungerade sein. Folglich ist auch $\mathrm{ggT}(c_1, 2c_2, c_3) = 1$, das heißt, q ist primitiv. Außerdem ist $\Delta := -4 \det \widetilde{C} = -32$ die Diskriminante von q. Damit ist q zu genau einer der beiden folgenden Formen äquivalent (siehe zum Beispiel Seite 20 in [24]):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für die beiden oben verwendeten Cartanmatrizen für $\overline{b_c}$ (mit Defektgruppe D_8) gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall tritt also nur die zweite Matrix bis auf Äquivalenz auf. Wir zeigen, dass dies auch für den Block B gilt.

Satz 4.26. *Die Cartanmatrix von B ist zur Matrix*

$$2^{r-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

äquivalent.

Beweis. Wir argumentieren durch Induktion nach r. Der Induktionsanfang wurde durch die Betrachtung von b_c in Abschnitt 4.2.2 bereits erledigt (dies würde dem Fall $r = 1$ entsprechen). Nehmen wir also $r \ge 2$ an. Wir bestimmen zunächst die Zahlen $d^u_{\chi\varphi}$ für $u \in \langle c\rangle \setminus \{1\}$ mit $|\langle u\rangle| = 2^k < 2^{r-1}$. Wie im Beweis von Satz 4.24 bereits bemerkt wurde, hat $D/\langle u\rangle$ den gleichen Isomorphietyp wie D, nur dass man r durch $r-k$ ersetzen muss. Nach Induktionsvoraussetzung hat dann b_u bis auf Äquivalenz die im Satz angegebene Cartanmatrix. Wir können daher wie im Fall $u = c$ verfahren (siehe Abschnitt 4.2.2). Sei dafür C_u die Cartanmatrix von b_u und $S_u \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit

$$C_u = 2^{r-1} S_u^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} S_u.$$

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.2.2 nehmen wir also an, dass der zweite Fall eintritt. (Dies ist erlaubt, da wir die Zerlegungszahlen ohnehin nur bis auf Multiplikation mit S_u berechnen können. Man kann außerdem leicht zeigen, dass diese Matrix für die Gruppen aus dem Beweis von Lemma 4.6 tatsächlich als Cartanmatrix auftritt.) Wie üblich schreiben wir $\mathrm{IBr}(b_u) = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, $D_u := (d^u_{\chi\varphi_i})$ und $(\widetilde{d}^u_{\chi\varphi_i}) := D_u S_u^{-1}$. Völlig analog wie in Abschnitt 4.2.2 folgt nun

$$\widetilde{d}^u_{\chi\varphi_1} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^k}^{[\frac{i-1}{2^{r+2-k}}]} & \text{falls } 1 \le i \le k_0(B) \\ 0 & \text{falls } k_0(B) < i \le k(B) \end{cases}$$

und

$$\widetilde{d}^u_{\chi\varphi_2} = \begin{cases} \pm\zeta_{2^k}^{[\frac{i-1}{2^{r-k+1}}]} & \text{falls } 1 \le i \le 2^r \\ 0 & \text{falls } 2^r < i \le k_0(B) \\ \pm\zeta_{2^k}^{[\frac{i-k_0(B)-1}{2^{r-k}}]} & \text{falls } k_0(B) < i \le k(B) \end{cases}.$$

Dabei seien $\chi_1, \ldots, \chi_{k_0(B)}$ die Charaktere der Höhe 0. Man beachte jedoch, dass die Reihenfolge dieser Charaktere für φ_1 und φ_2 unterschiedlich gewählt wurde.

Nehmen wir nun an, dass eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit

$$C = 2^{r-1} S^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} S$$

existiert. Ist Q die Zerlegungsmatrix von B, so setzen wir $(\widetilde{d}_{\chi\varphi_i}) := QS^{-1}$ mit $\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Wie im Beweis von Satz 4.17 folgt dann

$$|D|m^{(1,B)}_{\chi\psi} = 8\widetilde{d}_{\chi\varphi_1}\widetilde{d}_{\psi\varphi_1} + \widetilde{d}_{\chi\varphi_2}\widetilde{d}_{\psi\varphi_2} \qquad \text{für } \chi, \psi \in \mathrm{Irr}(B).$$

Insbesondere gilt $|D|m^{(1,B)}_{\chi\chi} \equiv 1 \pmod 4$ für einen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ der Höhe 0. Für $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$ ist $|D|m^{(u,b_u)}_{\chi\chi} = 2$, und für $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle c\rangle$ ist $|D|m^{(u,b_u)}_{\chi\chi} = 1$. Sei nun $u \in \langle c\rangle \setminus \{1\}$. Nach Gleichung (4.10) und den obigen Überlegungen ist dann $|D|m^{(u,b_u)}_{\chi\chi} \equiv 3 \pmod 4$. Mit (5B) in [17] folgt nun der Widerspruch

$$|D| = \sum_{u \in \mathcal{T}} |D|m^{(u,b_u)}_{\chi\chi} \equiv |D|m^{(1,B)}_{\chi\chi} + 2^{r+1} + 2^{r-1} + 3 \cdot (2^{r-1} - 1) \equiv 2 \pmod 4. \qquad \square$$

Der Beweis liefert nun auch die gewöhnlichen Zerlegungszahlen (bis auf Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix):

$$d_{\chi\varphi_1} = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } h(\chi) = 0 \\ 0 & \text{falls } h(\chi) = 1 \end{cases}, \qquad d_{\chi_i\varphi_2} = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } 0 \le i \le 2^r \\ 0 & \text{falls } 2^r < i \le k_0(B) \\ \pm 1 & \text{falls } k_0(B) < i \le k(B) \end{cases}.$$

Dabei sind $\chi_1, \ldots, \chi_{k_0(B)}$ wieder die Charaktere der Höhe 0.

Da wir die Operation von $\mathcal{G}$ auf den B-Elementen schon kennen, kann man nun auch die Operation von $\mathcal{G}$ auf $\operatorname{Irr}(B)$ bestimmen.

Satz 4.27. *Die irreduziblen Charaktere der Höhe* 0 *von* B *zerfallen in* $2(r+1)$ *Familien* 2-*konjugierter Charaktere. Diese Familien haben die Größen* $1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, \ldots, 2^{r-1}, 2^{r-1}$. *Die Charaktere der Höhe* 1 *zerfallen in* r *Familien mit den Größen* $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{r-2}$. *Insbesondere gibt es genau sechs* 2-*rationale Charaktere.*

Beweis. Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Bahnen unter der Operation von $\mathcal{G}$ auf den Spalten der vollständigen Zerlegungsmatrix. Offenbar zerfallen die Spalten $\{d^u_{\chi\varphi_u} : \chi \in \operatorname{Irr}(B)\}$ mit $u \in \mathcal{T} \setminus \mathrm{Z}(D)$ in zwei Bahnen der Länge 2^{r-1}. Für $i = 1, 2$ zerfallen die Spalten $\{d^u_{\chi\varphi_i} : \chi \in \operatorname{Irr}(B)\}$ mit $u \in \langle c \rangle$ in r Bahnen mit den Längen $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{r-2}$. Schließlich gibt es unter den Spalten $\{d^u_{\chi\varphi_u} : \chi \in \operatorname{Irr}(B)\}$ mit $u \in \mathrm{Z}(D) \setminus \langle c \rangle$ genau r Bahnen mit den Längen $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{r-2}$. Dies liefert insgesamt $3r+2$ Bahnen. Nach Theorem 11 in [13] existieren daher auch genau $3r+2$ Familien von 2-konjugierten Charakteren. (Da $\mathcal{G}$ nichtzyklisch ist, weiß man a priori nicht, ob auch die Bahnenlängen der beiden Operationen übereinstimmen.) Durch Betrachtung der Spalte $\{d^x_{\chi\varphi_x} : \chi \in \operatorname{Irr}(B)\}$ sieht man, dass die Charaktere der Höhe 0 in höchstens $2(r+1)$ Bahnen mit den Längen $1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, \ldots, 2^{r-1}, 2^{r-1}$ zerfallen. Analog sieht man an der Spalte $\{d^c_{\chi\varphi_2} : \chi \in \operatorname{Irr}(B)\}$, dass es höchstens r Bahnen mit den Längen $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{r-2}$ von Charakteren der Höhe 1 gibt. Wegen $2(r+1)+r = 3r+2$ fallen diese Bahnen nicht weiter zusammen, und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

4.2.4 Überprüfung der Dade-Vermutung

Zum Nachweis der Dade-Vermutung benötigen wir zunächst einen Hilfssatz. Um die bisherigen Bezeichnungen beizubehalten, formulieren wir die Aussage mit neuen Variablen.

Lemma 4.28. *Sei* $\widetilde{B}$ *ein Block von* RG *mit Defektgruppe* $\widetilde{D} \cong C_{2^s} \times C_2^2$ $(s \in \mathbb{N}_0)$ *und Trägheitsindex* 3. *Dann ist* $k(\widetilde{B}) = k_0(\widetilde{B}) = |\widetilde{D}| = 2^{s+2}$ *und* $l(\widetilde{B}) = 3$.

Beweis. Die Aussage würde leicht aus der in Abschnitt 3.1 zitierten (in diesem Fall unbewiesenen) Behauptung von Usami und Puig folgen. Wir führen stattdessen einen elementaren Beweis. Sei α der von der Trägheitsgruppe induzierte Automorphismus der Ordnung 3 auf $\widetilde{D}$. Nach Lemma 4.21 ist dann $\mathrm{C}_{\widetilde{D}}(\alpha) \cong C_{2^s}$. Wir wählen ein Repräsentantensystem $x_1, \ldots, x_k$ für die Bahnen von $\widetilde{D} \setminus \mathrm{C}_{\widetilde{D}}(\alpha)$ unter α. Dabei gilt $k = 2^s$. Sind $b_i \in \operatorname{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(x_i))$ für $i = 1, \ldots, k$ und $b_u \in \operatorname{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(u))$ für $u \in \mathrm{C}_{\widetilde{D}}(\alpha)$ Brauer-Korrespondenten von $\widetilde{B}$, so ist

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{(x_i, b_i)\} \;\cup \bigcup_{u \in \mathrm{C}_{\widetilde{D}}(\alpha)} \{(u, b_u)\}$$

ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von $\widetilde{B}$-Elementen (siehe Satz 1.39). Wegen $\alpha \notin \mathrm{C}_G(x_i)$ ist $l(b_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, k$. Insbesondere gilt $k(\widetilde{B}) \le 2^{s+2}$. Für die umgekehrte Ungleichung argumentieren wir durch Induktion nach s.

Im Fall $s = 0$ ist die Behauptung bekannt. Sei also $s \ge 1$. Nach Induktionsvoraussetzung und Satz 1.20 ist dann $l(b_u) = 3$ für $u \in \mathrm{C}_{\widetilde{D}}(\alpha) \setminus \{1\}$. Dies zeigt $k(\widetilde{B}) - l(\widetilde{B}) = k + (2^s - 1)3 = 2^{s+2} - 3$ und $l(\widetilde{B}) \le 3$. Durch Betrachtung der verallgemeinerten Zerlegungszahlen $d^{x_1}_{\chi\varphi}$ folgt nun $k(\widetilde{B}) = k_0(\widetilde{B}) = 2^{s+2} = |\widetilde{D}|$ und $l(\widetilde{B}) = 3$ (hierfür könnte man auch Theorem 1 in [103] benutzen). □

Sei nun $\mathrm{O}_2(G) = 1$. Um die Dade-Vermutung zu überprüfen, genügt es, Ketten

$$\sigma : P_1 < P_2 < \ldots < P_n$$

von nichttrivialen elementarabelschen 2-Untergruppen von G zu untersuchen (siehe [28]). Insbesondere ist $P_i \trianglelefteq P_n$ und $P_n \trianglelefteq \mathrm{N}_G(\sigma)$ für $i = 1, \ldots, n$. Für einen Block $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(\sigma))$ mit $b^G = B$ und Defektgruppe Q gilt daher stets $P_n \le Q$. Außerdem existiert ein $g \in G$ mit ${}^gQ \le D$. Konjugiert man die Kette also mit g, so kann man stets $P_n \le Q \le D$ annehmen (siehe auch Lemma 6.9 in [28]). Insbesondere gilt $n \le 3$.

Im Fall $|P_n| = 8$ ist $P_n = \langle x^{2^{r-1}}, y, z\rangle =: E$ die einzige elementarabelsche Untergruppe von D der Ordnung 8. Sei $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(\sigma))$ mit $b^G = B$. Wir wählen eine Defektgruppe Q von $\widetilde{B} := b^{\mathrm{N}_G(E)}$. Wegen $\Omega(Q) = P_n$ ist dann $\mathrm{N}_G(Q) \le \mathrm{N}_G(E)$. Brauers erster Hauptsatz impliziert daher $Q = D$. Insbesondere ist $\widetilde{B}$ der eindeutig bestimmte Brauer-Korrespondent von B. Für $M := \langle x^2, y, z\rangle \le D$ gilt ebenfalls $\mathrm{N}_G(M) \le \mathrm{N}_G(\Omega(M)) = \mathrm{N}_G(E)$. Daher ist $\widetilde{B}$ nichtnilpotent. Betrachtet man nun die Kette

$$\widetilde{\sigma} : \begin{cases} \varnothing & \text{falls } n = 1 \\ P_1 & \text{falls } n = 2 \\ P_1 < P_2 & \text{falls } n = 3 \end{cases}$$

in der Gruppe $\widetilde{G} := \mathrm{N}_G(E)$, so ist $\mathrm{N}_G(\sigma) = \mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\sigma})$ und

$$\sum_{\substack{b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(\sigma)),\\ b^G = B}} k^i(b) = \sum_{\substack{b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\sigma})),\\ b^{\widetilde{G}} = \widetilde{B}}} k^i(b).$$

Insgesamt decken die Ketten σ und $\widetilde{\sigma}$ alle möglichen Ketten von G ab. Außerdem haben die Längen von σ und $\widetilde{\sigma}$ unterschiedliche Parität. Es wäre daher plausibel, wenn sich die Beiträge in der alternierenden Summe bzgl. σ mit denen bzgl. $\widetilde{\sigma}$ gegenseitig aufheben. Die Frage ist dabei, ob man $(\widetilde{G}, \widetilde{B}, \widetilde{\sigma})$ durch $(G, B, \widetilde{\sigma})$ ersetzen kann. Wir präzisieren dies:

Lemma 4.29. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen von Paaren (σ, b). Dabei ist σ eine Kette (von G) der Länge n mit $P_n < E$ und $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(\sigma))$ ein Brauer-Korrespondent von B. Analog sei $\widetilde{\mathcal{Q}}$ ein Repräsentantensystem für die $\widetilde{G}$-Konjugationsklassen von Paaren $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{b})$. Dabei ist $\widetilde{\sigma}$ eine Kette (von $\widetilde{G}$) der Länge n mit $P_n < E$ und $\widetilde{b} \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\sigma}))$ ein Brauer-Korrespondent von $\widetilde{B}$. Dann existiert eine Bijektion zwischen $\mathcal{Q}$ und $\widetilde{\mathcal{Q}}$, die die Zahlen $k^i(b)$ erhält.*

Beweis. Sei (D, b_D) ein B-Sylowpaar. Wir betrachten Ketten von B-Unterpaaren

$$\sigma : (P_1, b_1) < (P_2, b_2) < \ldots < (P_n, b_n) < (D, b_D),$$

wobei die P_i wieder nichttriviale elementarabelsche 2-Untergruppen mit $P_n < E$ sind. Man beachte, dass σ durch die Untergruppen $P_1, \ldots, P_n$ bereits eindeutig bestimmt ist. Außerdem sei auch die leere Kette zugelassen. Sei $\mathcal{U}$ ein Repräsentantensystem für die G-Konjugationsklassen solcher Ketten. Für jede Kette $\sigma \in \mathcal{U}$ definieren wir

$$\widetilde{\sigma} : (P_1, \widetilde{b_1}) < (P_2, \widetilde{b_2}) < \ldots < (P_n, \widetilde{b_n}) < (D, b_D)$$

mit $\widetilde{b_i} \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(P_i))$ für $i = 1, \ldots, n$. Schließlich sei $\widetilde{\mathcal{U}} := \{\widetilde{\sigma} : \sigma \in \mathcal{U}\}$. Nach Alperins Fusionssatz ist dann $\widetilde{\mathcal{U}}$ ein Repräsentantensystem für die $\widetilde{G}$-Konjugationsklassen von entsprechenden Ketten bzgl. $\widetilde{B}$. Daher ist nur zu zeigen, dass Bijektionen f (bzw. $\widetilde{f}$) zwischen $\mathcal{U}$ (bzw. $\widetilde{\mathcal{U}}$) und $\mathcal{Q}$ (bzw. $\widetilde{\mathcal{Q}}$) existieren, die folgende Eigenschaft erfüllen: Ist $f(\sigma) = (\tau, b)$ und $\widetilde{f}(\widetilde{\sigma}) = (\widetilde{\tau}, \widetilde{b})$, so gilt $k^i(b) = k^i(\widetilde{b})$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

Sei $\sigma \in \mathcal{U}$. Wir definieren dann die Kette τ, indem wir nur die Untergruppen von σ betrachten, das heißt $\tau : P_1 < \ldots < P_n$. Dann ist $\mathrm{C}_G(P_n) \subseteq \mathrm{N}_G(\tau)$, und wir können

$$f : \mathcal{U} \to \mathcal{Q}, \ \sigma \mapsto \bigl(\tau, b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}\bigr)$$

definieren. Sei $(\sigma, b) \in \mathcal{Q}$ beliebig vorgegeben. Wir schreiben $\sigma : P_1 < \ldots < P_n$. Nach Theorem 5.5.15 in [70] existiert dann ein Brauer-Korrespondent $\beta_n \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P_n))$ von b. Da dann (P_n, β_n) ein B-Unterpaar ist, kann man durch geeignete Konjugation $(P_n, \beta_n) < (D, b_D)$ erreichen. Bekanntlich existieren für $i = 1, \ldots, n-1$ eindeutig bestimmte Blöcke $\beta_i \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P_i))$ mit

$$(P_1, \beta_1) < (P_2, \beta_2) < \ldots < (P_n, \beta_n) < (D, b_D).$$

Dies zeigt die Surjektivität von f.

Seien nun $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{U}$ gegeben. Wir schreiben

$$\sigma_i : (P_1^i, \beta_1^i) < \ldots < (P_n^i, \beta_n^i)$$

für $i = 1, 2$. Nehmen wir an, dass $f(\sigma_1) = (\tau_1, b_1)$ und $f(\sigma_2) = (\tau_2, b_2)$ in G konjugiert sind, das heißt, es gibt ein $g \in G$ mit

$$\bigl(\tau_2, ({}^g\beta_n^1)^{\mathrm{N}_G(\tau_2)}\bigr) = {}^g(\tau_1, b_1) = (\tau_2, b_2) = \bigl(\tau_2, (\beta_n^2)^{\mathrm{N}_G(\tau_2)}\bigr).$$

Da sowohl ${}^g\beta_n^1 \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P_n^2))$ als auch β_n^2 von b_2 überdeckt wird, existiert ein $h \in \mathrm{N}_G(\tau_2)$ mit ${}^{hg}\beta_n^1 = \beta_n^2$. Dann ist

$${}^{hg}(P_n^1, \beta_n^1) = (P_n^2, \beta_n^2).$$

Da die Blöcke β_j^i für $i = 1, 2$ und $j = 1, \ldots, n-1$ durch P_j^i eindeutig bestimmt sind, ist auch ${}^{gh}\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_1$. Dies zeigt die Injektivität von f. Völlig analog definiert man $\widetilde{f}$.

Es bleibt zu zeigen, dass f und $\widetilde{f}$ die angegebene Bedingung erfüllen. Sei dafür $\sigma \in \mathcal{U}$ mit $\sigma : (P_1, b_1) < \ldots < (P_n, b_n)$, $\widetilde{\sigma} : (P_1, \widetilde{b_1}) < \ldots < (P_n, \widetilde{b_n})$, $f(\sigma) = \bigl(\tau, b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}\bigr)$ und $\widetilde{f}(\widetilde{\sigma}) = \bigl(\tau, \widetilde{b_n}^{\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau)}\bigr)$. Wir müssen $k^i\bigl(b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}\bigr) = k^i\bigl(\widetilde{b_n}^{\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau)}\bigr)$ für $i \in \mathbb{N}_0$ zeigen.

Sei Q eine Defektgruppe von $b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}$. Dann ist $Q\,\mathrm{C}_G(Q) \subseteq \mathrm{N}_G(\tau)$, und es gibt einen Brauer-Korrespondenten $\beta_n \in \mathrm{Bl}(RQ\,\mathrm{C}_G(Q))$ von $b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}$. Insbesondere ist (Q, β_n) ein B-Brauerpaar. Nach den Sätzen aus Abschnitt 1.9 kann man $Q \in \{D, M, \langle x, z\rangle, \langle xy, z\rangle\}$ annehmen (siehe auch Beweis von Lemma 4.20). Die gleichen Überlegungen gelten auch für eine Defektgruppe $\widetilde{Q}$ von $\widetilde{b_n}^{\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau)}$. Wegen $b_n^{D\,\mathrm{C}_G(P_n)} = b_D^{D\,\mathrm{C}_G(P_n)} = \widetilde{b_n}^{D\,\mathrm{C}_G(P_n)}$ gilt daher:

$$Q = D \Longleftrightarrow D \subseteq \mathrm{N}_G(\tau) \Longleftrightarrow D \subseteq \mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau) \Longleftrightarrow \widetilde{Q} = D.$$

Betrachten wir den Fall $Q = D$ $(= \widetilde{Q})$. Sei $b_M \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(M))$ mit $(M, b_M) \leq (D, b_D)$ und $\alpha \in \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_M) \setminus D\,\mathrm{C}_G(M) \subseteq \mathrm{N}_G(M) \subseteq \widetilde{G}$. Dann gilt:

$$b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)} \text{ ist nilpotent} \Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{N}_G(\tau) \Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau) \Longleftrightarrow \widetilde{b_n}^{\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau)} \text{ ist nilpotent.}$$

Dieser Fall ist also erledigt. Sei nun $Q < D$ (und damit auch $\widetilde{Q} < D$). Dann ist $Q\,\mathrm{C}_G(Q) = \mathrm{C}_G(Q) \subseteq \mathrm{C}_G(P_n)$. Offenbar ist $\beta_n^{\mathrm{C}_G(P_n)}$ auch ein Brauer-Korrespondent von $b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}$. Wie oben sind also $\beta_n^{\mathrm{C}_G(P_n)}$ und b_n konjugiert. Insbesondere hat auch b_n (und $\widetilde{b_n}$) Defektgruppe Q. Dies zeigt $Q = \widetilde{Q}$. Im Fall $Q \in \{\langle x, z\rangle, \langle xy, z\rangle\}$ sind $b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}$ und $\widetilde{b_n}^{\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau)}$ nilpotent, und die Behauptung gilt. Sei schließlich $Q = M$. Wie eben gilt dann:

$$b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)} \text{ ist nilpotent} \Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{N}_G(\tau) \Longleftrightarrow \alpha \notin \mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau) \Longleftrightarrow \widetilde{b_n}^{\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau)} \text{ ist nilpotent.}$$

Der nilpotente Fall ist klar. Im nichtnilpotenten Fall ist $t\big(b_n^{\mathrm{N}_G(\tau)}\big) = t\big(\widetilde{b_n}^{\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(\tau)}\big) = 3$. Verwendet man nun Lemma 4.28, so folgt auch in diesem Fall die Behauptung. $\square$

Wie eingangs beschrieben folgt nun die Dade-Vermutung.

Satz 4.30. *Die Dade-Vermutung gilt für den Block B.*

4.2.5 Überprüfung von Alperins Gewichts-Vermutung

Sei (P, β) ein B-Gewicht (siehe Kapitel 2). Der dazugehörige Brauer-Korrespondent (der β dominiert) sei $b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(P))$. Wie üblich kann man dann $P \leq D$ annehmen. Ist $\mathrm{Aut}(P)$ eine 2-Gruppe, so ist auch $\mathrm{N}_G(P)/\,\mathrm{C}_G(P)$ eine 2-Gruppe. Aus Satz 1.20 folgt dann $P \in \mathrm{Def}(b)$, da β Defekt 0 hat. Außerdem ist dann β durch b eindeutig bestimmt. Nach Brauers erstem Hauptsatz ist $P = D$. Dieser Fall liefert also bis auf Konjugation genau ein B-Gewicht (siehe Satz 1.21).

Sei nun $\mathrm{Aut}(P)$ keine 2-Gruppe (und damit $P < D$). Wie üblich überdeckt β einen Block $\beta_1 \in \mathrm{Bl}(R[\mathrm{C}_G(P)/P])$. Nach Satz 1.18(iv) hat dann auch β_1 Defekt 0. Also wird β_1 von genau einem Block $b_1 \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P))$ mit Defektgruppe P dominiert (siehe Satz 1.20). Wegen $\beta\beta_1 \neq 0$ ist auch $bb_1 \neq 0$, das heißt, b (definiert wie im ersten Fall) überdeckt b_1. Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
\beta \in \mathrm{Bl}(R[\mathrm{N}_G(P)/P]) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & b \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{N}_G(P)) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\beta_1 \in \mathrm{Bl}(R[\mathrm{C}_G(P)/P]) \arrow[r, leftrightarrow] & b_1 \in \mathrm{Bl}(R\,\mathrm{C}_G(P))
\end{tikzcd}$$

Nach Theorem 5.5.15 in [70] ist $b_1^{\mathrm{N}_G(P)} = b$ und $b_1^G = B$. Somit ist (P, b_1) ein B-Brauerpaar. Nach unserer Voraussetzung an P ist daher $P = M\ (= \langle x^2, y, z\rangle)$. Nach Brauers erstem Hauptsatz ist b also eindeutig bestimmt (unabhängig von β). Wir beweisen nun, dass β durch b eindeutig bestimmt ist.

Dafür genügt es zu zeigen, dass β der einzige Block vom Defekt 0 ist, der β_1 überdeckt. Nach Satz 1.18 reicht es außerdem zu zeigen, dass β_1 nur von einem Block von $R\,\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)/M}(\beta_1) = R[\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_1)/M]$ mit Defekt 0 überdeckt wird. Zur besseren Übersicht schreiben wir $\overline{\mathrm{C}_G(M)} := \mathrm{C}_G(M)/M$, $\overline{\mathrm{N}_G(M)} := \mathrm{N}_G(M)/M$ und $\overline{\mathrm{T}} := \mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_1)/M$. Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(\beta_1)$. Die irreduziblen Bestandteile von $\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{C}_G(M)}}^{\overline{\mathrm{T}}}(\chi)$ gehören dann zu Blöcken, die β_1 überdecken. Umgekehrt erhält man auf diese Weise alle Blöcke von $R\overline{\mathrm{T}}$, die β_1 überdecken (siehe Lemma 5.5.7 in [70]). Sei

$$\mathrm{Ind}_{\overline{\mathrm{C}_G(M)}}^{\overline{\mathrm{T}}}(\chi) = \sum_{i=1}^{t} e_i\psi_i$$

mit $\psi_i \in \mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{T}})$ und $e_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, t$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{t} e_i^2 = |\overline{\mathrm{T}} : \overline{\mathrm{C}_G(M)}| = |\mathrm{T}_{\mathrm{N}_G(M)}(b_1) : \mathrm{C}_G(M)| = 6$$

(siehe Seite 84 in [46]). Also existiert ein $i \in \{1, \ldots, t\}$ mit $e_i = 1$, das heißt, man kann χ auf $\overline{\mathrm{T}}$ fortsetzen. Wir nehmen $e_1 = 1$ an. Nach Corollary 6.17 in [46] ist nun $t = |\mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{T}}/\overline{\mathrm{C}_G(M)})| = |\mathrm{Irr}(S_3)| = 3$ und

$$\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \bigl\{\psi_1\tau : \tau \in \mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{T}}/\overline{\mathrm{C}_G(M)})\bigr\}.$$

Dabei werden die Charaktere in $\mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{T}}/\overline{\mathrm{C}_G(M)})$ mit ihren Inflationen in $\mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{T}})$ identifiziert. Wir können also $e_2 = 1$ und $e_3 = 2$ annehmen. Dann sieht man leicht, dass ψ_1 und ψ_2 zu Blöcken mit Defekt größer gleich 1 gehören. Also kommt nur der zu ψ_3 gehörende Block in Frage. Dies zeigt die Behauptung.

Nun überlegen wir uns umgekehrt, dass tatsächlich ein B-Gewicht der Form (M, β) existiert. Dafür kann man b, b_1, β_1, χ und ψ_i wie eben wählen. Nach Satz 2.1 verschwindet χ auf allen nichttrivialen 2-Elementen. Außerdem war ψ_1 eine Fortsetzung von χ. Sei nun $\tau \in \mathrm{Irr}(\overline{\mathrm{T}}/\overline{\mathrm{C}_G(M)})$ der Charakter vom Grad 2. Dann verschwindet τ auf allen nichttrivialen 2-Elementen von $\overline{\mathrm{T}}/\overline{\mathrm{C}_G(M)}$. Somit verschwindet auch $\psi_3 = \psi_1\tau$ auf allen nichttrivialen 2-Elementen von $\overline{\mathrm{T}}$. Dies zeigt, dass ψ_3 tatsächlich zu einem Block $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Bl}(R\overline{\mathrm{T}})$ vom Defekt 0 gehört. Damit ist $\bigl(M, \widetilde{\beta}^{\overline{\mathrm{N}_G(M)}}\bigr)$ das gesuchte B-Gewicht.

Insgesamt gibt es also bis auf Konjugation genau zwei B-Gewichte. Wegen $l(B) = 2$ ist daher Alperins Gewichts-Vermutung bestätigt.

Satz 4.31. *Alperins Gewichts-Vermutung gilt für den Block B.*

4.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt fassen wir die Ergebnisse des 4. Kapitels zusammen.

Satz 4.32. *Sei B ein 2-Block von RG mit minimal nichtabelscher Defektgruppe D. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:*

(i) *B ist nilpotent.*

(ii) *$D \cong D_8$ oder $D \cong Q_8$. In diesem Fall kann man Satz 2.3 bzw. 2.4 anwenden.*

(iii) *$D \cong \langle x, y \mid x^{2^r} = y^2 = [x, y]^2 = [x, x, y] = [y, x, y] = 1 \rangle$ mit $r \geq 2$. Es gilt*

$$|D| = 2^{r+2}, \qquad t(B) = 1, \qquad k(B) = 5 \cdot 2^{r-1},$$
$$k_0(B) = 2^{r+1}, \qquad k_1(B) = 2^{r-1}, \qquad l(B) = 2.$$

Die Cartanmatrix C von B hat bis auf Äquivalenz die Form

$$2^{r-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind 2^{r-1} und $|D| = 2^{r+2}$ die Elementarteiler von C. Die irreduziblen Charaktere der Höhe 0 von B zerfallen in $2(r+1)$ Familien 2-konjugierter Charaktere. Diese Familien haben die Größen $1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, \ldots, 2^{r-1}, 2^{r-1}$. Die Charaktere der Höhe 1 zerfallen in r Familien mit den Größen $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{r-2}$. Insbesondere gibt es genau sechs 2-rationale Charaktere. Außerdem sind einige Resultate über die (verallgemeinerten) Zerlegungszahlen bekannt (siehe Abschnitt 4.2.2).

(iv) *$D \cong \langle x, y \mid x^{2^r} = y^{2^r} = [x, y]^2 = [x, x, y] = [y, x, y] = 1 \rangle$ mit $r \geq 2$. Es gilt*

$$|D| = 2^{2r+1}, \qquad t(B) = 3,$$
$$k(B) - l(B) = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 7}{3}, \qquad k(B) \leq \frac{|D| + 16}{3},$$
$$k(B) \leq \sum_{i=0}^{3} 2^{2i} k_i(B) \leq |D|, \qquad k_i(B) = 0 \text{ für } i \geq 4,$$
$$l(B) \geq 3.$$

Die Fusion von B-Unterpaaren wird durch D kontrolliert. Die Elementarteiler der Cartanmatrix liegen in $\{1, 2, |D|\}$, wobei 2 mit Vielfachheit 2 und $|D|$ mit Vielfachheit 1 auftritt. Außerdem ist Alperins Gewichts-Vermutung zu $l(B) = 3$ äquivalent. Im Fall $\mathrm{O}_2(G) \neq 1$ gilt

$$k(B) = \frac{5 \cdot 2^{2(r-1)} + 16}{3}, \qquad k_0(B) \geq \frac{2^{2r} + 8}{3}, \qquad l(B) = 3.$$

Hat B maximalen Defekt oder ist $r = 2$, so hat man zusätzlich

$$k_0(B) = \frac{2^{2r} + 8}{3}, \qquad k_1(B) = \frac{2^{2(r-1)} + 8}{3}.$$

Für $r = 2$ ist die Cartanmatrix von B zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Außerdem existieren dann zwei Paare 2-konjugierter Charaktere der Höhe 0. Die verbleibenden 8 Charaktere sind 2-rational.

In allen Fällen sind Brauers $k(B)$-Vermutung und die Olsson-Vermutung erfüllt. Zusätzlich sind in den ersten drei Fällen auch die übrigen Vermutungen (Brauers Höhe-Null-Vermutung, Alperin-McKay-Vermutung, Alperins Gewichts-Vermutung und die Dade-Vermutung) erfüllt.

5 Allgemeine Ergebnisse

In diesem Kapitel formulieren und beweisen wir einige Ergebnisse, die unabhängig von der gewählten Defektgruppe und teilweise sogar unabhängig von der Primzahl p sind. In den Abschnitten 4.1.2 und 4.2.3 trat das Problem auf zu entscheiden, in welcher Äquivalenzklasse von Matrizen eine vorgegebene Cartanmatrix liegt. In beiden Fällen stellte sich heraus, dass die möglichen Repräsentanten für die Äquivalenzklassen unzerlegbare Matrizen sind. Dabei heißt eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{Z}^{l\times l}$ *zerlegbar*, falls eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{Z}^{l\times l}$ mit

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

existiert. Hierbei ist $A_1 \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ und $A_2 \in \mathbb{Z}^{(l-m)\times(l-m)}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \le m < l$. Es ist bekannt, dass die Cartanmatrix eines Blocks selbst stets unzerlegbar ist. Es stellt sich daher folgende Frage:

Problem. *Gibt es eine Cartanmatrix C eines Blocks B und eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(l(B), \mathbb{Z})$, sodass $S^{\mathrm{T}}CS$ zerlegbar ist?*

Wir werden diese Frage in einigen Spezialfällen negativ beantworten. Das erste Resultat beschränkt sich dabei auf p-auflösbare Gruppen. Dabei heißt eine Gruppe G *p-auflösbar*, wenn alle Kompositionsfaktoren von G p-Gruppen oder p'-Gruppen sind. Offenbar ist jede auflösbare Gruppe auch p-auflösbar. Nach dem Satz von Feit und Thompson gilt für $p = 2$ auch die Umkehrung.

Lemma 5.1. *Sei p eine Primzahl, G eine p-auflösbare Gruppe und B ein p-Block von RG mit $l := l(B) \ge 2$ und Defekt d. Dann ist die Cartanmatrix C von B zu keiner Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} p^d & 0 \\ 0 & C_1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $C_1 \in \mathbb{Z}^{(l-1)\times(l-1)}$ äquivalent. Insbesondere ist C zu keiner Diagonalmatrix äquivalent.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann existiert eine Matrix $S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}(l, \mathbb{Z})$ mit

$$C = (c_{ij}) = S^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} p^d & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} S.$$

Sei $s_i := (s_{2i}, s_{3i}, \ldots, s_{li})$ für $i = 1, \ldots, l$. Nach Theorem (3H) in [34] gilt dann

$$p^d s_{1i}^2 + s_i C_1 s_i^{\mathrm{T}} = c_{ii} \le p^d$$

für $i = 1, \ldots, l$. Da S invertierbar ist, existiert ein $i \in \{1, \ldots, l\}$ mit $s_{1i} \ne 0$. Sei o. B. d. A. $i = 1$. Da C_1 positiv definit ist, folgt dann $s_{11} = \pm 1$ und $s_1 = (0, \ldots, 0)$. Damit ist auch $s_{1i} = 0$ für $i = 2, \ldots, l$, denn die Spalten von S sind linear unabhängig. Also hat S die Form $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $S_1 \in \mathrm{GL}(l-1, \mathbb{Z})$. Dann hätte aber auch C die Form $\left(\begin{smallmatrix} p^d & 0 \\ 0 & C_2 \end{smallmatrix}\right)$ mit $C_2 \in \mathbb{Z}^{(l-1)\times(l-1)}$. Wie oben erwähnt wurde, ist dies ausgeschlossen. Die zweite Behauptung folgt, da p^d ein Elementarteiler von C ist. $\square$

Bekanntlich gilt die Abschätzung der Cartaninvarianten im Beweis von Lemma 5.1 nicht mehr für beliebige Gruppen (siehe [64]).

Satz 5.2. *Sei B ein p-Block von RG mit Cartanmatrix C und Defekt d. Ist* $\det C = p^d$, *so ist die Matrix* $S^{\mathrm{T}}CS$ *für alle* $S \in \mathrm{GL}(l(B), \mathbb{Z})$ *unzerlegbar.*

Beweis. Sei $l := l(B)$ und $S \in \mathrm{GL}(l, \mathbb{Z})$ mit

$$C = S^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} S,$$

wobei $C_1 \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ und $C_2 \in \mathbb{Z}^{(l-m)\times(l-m)}$ mit $1 \le m < l$ gilt. Insbesondere sei also $l \ge 2$. Wegen $\det C = p^d$ sind 1 und p^d bis auf Vielfachheiten die einzigen Elementarteiler von C. Da p^d mit Vielfachheit 1 auftritt, können wir o. B. d. A. $\det C_1 = 1$ annehmen. Sei $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{Z}^{k(B)\times m}$ der entsprechende Teil der Zerlegungsmatrix von B (bis auf Multiplikation mit S), das heißt $Q^{\mathrm{T}}Q = C_1$. Aus der Binet-Cauchy-Formel (siehe zum Beispiel Seite 27 in [36]) folgt dann

$$1 = \det C_1 = \sum_{\substack{V \subseteq \{1,\ldots,k(B)\},\\ |V|=m}} \det Q_V^{\mathrm{T}} Q_V,$$

wobei Q_V die $m \times m$-Untermatrix von Q mit den Einträgen $\{q_{ij} : i \in V,\ j \in \{1, \ldots, m\}\}$ ist. Wegen $\det Q_V^{\mathrm{T}} Q_V = (\det Q_V)^2 \ge 0$ ist genau ein Summand in der Summe 1, während alle anderen Summanden 0 sind. Wir können daher annehmen, dass die ersten m Zeilen $q_1, \ldots, q_m$ von Q linear unabhängig sind. Betrachten wir nun eine Zeile q_i mit $m < i \le k(B)$. Da $q_2, q_3, \ldots, q_m, q_i$ linear abhängig sind, ist q_i eine rationale Linearkombination von $q_2, \ldots, q_m$. Analog ist q_i auch eine Linearkombination von $q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_m$ für jedes $j \in \{2, \ldots, m\}$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $q_1, \ldots, q_m$ folgt dann aber $q_i = (0, \ldots, 0)$. Also verschwinden alle Zeilen $q_{m+1}, \ldots, q_{k(B)}$ von Q. Wegen $l \ge 2$ existiert ein nichttriviales Element u in einer Defektgruppe von B. Da die Spalte $d^u := \{d^u_{\chi\varphi} : \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ für einen Charakter $\varphi \in \mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(u))$ orthogonal zu den Spalten von Q ist, müssen die ersten m Einträge von d^u verschwinden. Dies gilt für alle $u \ne 1$ und $\varphi \in \mathrm{IBr}(\mathrm{C}_G(u))$. Also gibt es einen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, der auf den p-singulären Elementen verschwindet. Dies widerspricht jedoch Satz 2.1. □

Der Beweis zeigt auch, dass die Matrix $C = (c_{ij})$ im Allgemeinen (ohne die Bedingung $\det C = p^d$) keine Untermatrix $C_V = (c_{ij})_{i,j\in V}$ für $V \subseteq \{1, \ldots, l(B)\}$ mit $\det C_V = 1$ haben kann.

Die Bedingung $\det C = p^d$ in Satz 5.2 ist zum Beispiel erfüllt, falls $l(b) = 1$ für alle B-Elemente $(u, b) \ne (1, B)$ gilt (siehe [35]). Dies wiederum gilt unter anderem für abelsche Defektgruppen D, falls jedes nichttriviale Element der Trägheitsgruppe fixpunktfrei auf D operiert, das heißt, das semidirekte Produkt der Trägheitsgruppe mit D ist eine Frobeniusgruppe. Insbesondere trifft dies auf Blöcke mit zyklischer Defektgruppe zu (man vergleiche mit Lemma 3.2). Außerdem bemerken wir, dass $\det C$ durch die Theorie der unteren Defektgruppen lokal bestimmt ist.

Oft kann man die Zahl $k(B)$ für einen Block B mit Hilfe der Cartaninvarianten nach oben abschätzen. Zum Beispiel haben wir in Abschnitt 4.1 die Ungleichung $(**)$ aus [63] angewendet. Mit Hilfe der Reduktionstheorie quadratischer Formen kann man die

Cartanmatrix eines Blocks in eine äquivalente Matrix mit „kleinen“ Einträgen überführen, sodass die Ungleichungen für $k(B)$ besser werden. Ist diese reduzierte Matrix zusätzlich unzerlegbar, so werden die Abschätzungen in der Regel noch besser. Zum Beispiel gilt für die Blöcke aus Abschnitt 4.2 sogar Gleichheit in $(**)$. Wir beweisen in diesem Zusammenhang eine Anwendung von Satz 5.2.

Satz 5.3. *Sei B ein p-Block von RG mit Cartanmatrix C, Defekt d und $l(B) \le 3$. Ist $\det C = p^d$, so gilt*

$$k(B) \le \frac{p^d - 1}{l(B)} + l(B).$$

Außerdem ist diese Abschätzung optimal.

Beweis. Für $l := l(B) = 1$ ist $k(B) \le p^d$, das heißt, die Behauptung ist erfüllt. Sei also $l \ge 2$. Wir wählen eine zu C äquivalente reduzierte Matrix $A = (a_{ij})$ (siehe [100]). Insbesondere gilt dann $1 \le a_{11} \le a_{22} \le \ldots \le a_{ll}$ und $2|a_{ij}| \le \min\{a_{ii}, a_{jj}\}$ für $i \ne j$. Wir schreiben $\alpha := a_{11}$, $\beta := a_{22}$ usw. Um nun die Ungleichung $(**)$ anwenden zu können, schätzen wir die Spur von A nach oben und die Summe $a_{12} + a_{23} + \ldots + a_{l-1,l}$ nach unten ab.

Sei $l = 2$. Nach Satz 5.2 ist $a_{12} \ne 0$. Durch einen Vorzeichenwechsel können wir sogar $a_{12} \ge 1$ annehmen. Nach [7] gilt $4\alpha\beta - \alpha^2 \le 4p^d$ und

$$\alpha + \beta \le \frac{5}{4}\alpha + \frac{p^d}{\alpha} =: f(\alpha).$$

Die Funktion $f(\alpha)$ ist auf dem Intervall $\big[2, 2\sqrt{p^d/3}\big]$ offenbar konvex. Daher nimmt sie ihr Maximum auf einer der beiden Grenzen an. Eine einfache Rechnung zeigt dann $(p^d+5)/2 = f(2) \ge f\big(2\sqrt{p^d/3}\big)$ für $p^d \ge 9$. Im Fall $p^d \le 6$ ist ohnehin nur $\alpha = 2$ zulässig. In den verbleibenden Fällen gilt $\alpha + \beta \le f(2)$ für alle zulässigen Paare (α, β). Die Ungleichung $(**)$ ergibt nun

$$k(B) \le \alpha + \beta - a_{12} \le f(2) - 1 = \frac{p^d - 1}{l(B)} + l(B).$$

Sei also $l = 3$. Nach Satz 5.2 ist A unzerlegbar. Durch eine geeignete Permutation von Zeilen (und den entsprechenden Spalten) kann man also $a_{12} \ne 0 \ne a_{23}$ erreichen. Schließlich führt ein geeigneter Vorzeichenwechsel zu $a_{12} + a_{23} \ge 2$. Durch diese Umformungen wird die Ungleichung $\alpha \le \beta \le \gamma$ möglicherweise verletzt. Da die Spur von A jedoch symmetrisch in α, β und γ ist, werden wir trotzdem $\alpha \le \beta \le \gamma$ annehmen. Die Ungleichung in [7] liefert dann

$$4\alpha\beta\gamma - \alpha\beta^2 - \alpha^2 c = 2\alpha\beta\gamma + \alpha\beta(\gamma - \beta) + \alpha\gamma(\beta - \alpha) \le 4p^d.$$

Also ist

$$\alpha + \beta + \gamma \le \alpha + \beta + \frac{4p^d + \alpha\beta^2}{4\alpha\beta - \alpha^2} =: f(\alpha, \beta).$$

Wir bestimmen nun eine konvexe Menge, die die zulässigen Paare (α, β) enthält. Wegen $2\alpha^3 \le 2\alpha\beta\gamma + \alpha\beta(\gamma - \beta) + \alpha\gamma(\beta - \alpha) \le 4p^d$ ist $2 \le \alpha \le \sqrt[3]{2p^d}$. Analog folgt $\alpha \le \beta \le \sqrt{p^d}$ aus $4\beta^2 \le 4p^d$. Also sind alle zulässigen Punkte in

$$\mathcal{F} := \big\{(\alpha, \beta) : 2 \le \alpha \le \sqrt[3]{2p^d},\ \alpha \le \beta \le \sqrt{p^d}\big\}$$

enthalten. Man kann nun (zum Beispiel mit Hilfe eines Computers) zeigen, dass $f(\alpha,\beta)$ konvex auf $\mathcal{F}$ ist. Das Maximum von f wird also auf einem der drei Eckpunkte

$$\begin{aligned} V_1 &= (2,2), \\ V_2 &= \big(2,\sqrt{p^d}\big), \\ V_3 &= \big(\sqrt[3]{2p^d},\sqrt[3]{2p^d}\big) \end{aligned}$$

angenommen. Eine Rechnung zeigt $(p^d+14)/3 = f(V_1) \ge f(V_2)$ für $p^d \ge 10$ und $f(V_1) \ge f(V_3)$ für $p^d \ge 12$. Für $p^d \le 10$ ist V_1 der einzige zulässige Punkt. Im Fall $p^d = 11$ ist auch $(\alpha,\beta) = (2,3)$ erlaubt. Dann ist aber $\gamma = 3$ und $\alpha+\beta+\gamma \le f(V_1)$. Mit Ungleichung $(**)$ folgt wieder

$$k(B) \le \alpha+\beta+\gamma-a_{12}-a_{23} \le f(V_1)-2 = \frac{p^d-1}{l(B)} + l(B).$$

Die zweite Behauptung ergibt sich aus Satz 2.2. □

Mit Hilfe der Ungleichungen aus [7] haben wir die Aussage von Satz 5.3 auch im Fall $l(B) = 4$ bewiesen. Da die Rechnungen jedoch weitaus komplizierter und rechnerlastiger sind, haben wir dieses Ergebnis nicht mit in die Arbeit aufgenommen. Die sogenannte „fundamentale Ungleichung“ für quadratische Formen (siehe [100]) erlaubt es, auch im Fall $l(B) \ge 5$ Resultate zu erzielen. Olsson hat allgemein bewiesen, dass die $k(B)$-Vermutung für Blöcke B mit $l(B) \le 2$ gilt (siehe Corollary 5 in [79]). Speziell für $p = 2$ hat er dies auch im Fall $l(B) = 3$ gezeigt (siehe Corollary 7 in [79]).

Mit anderen Methoden wurde in [12] die Ungleichung

$$k(B) \le 1 - l(B) + \sum_{i=1}^{l(B)} c_{ii}$$

für einen Block B mit Cartanmatrix $C = (c_{ij})$ bewiesen. Hier ist jedoch unklar, ob man C durch eine äquivalente Matrix ersetzen darf.

Da $k(B) - l(B)$ lokal bestimmt ist und die Kenntnis der Cartanmatrix bereits die Kenntnis von $l(B)$ voraussetzt, erscheint es in der Praxis wenig sinnvoll, $k(B)$ mit solchen Ungleichungen abschätzen zu wollen. Es wäre daher günstiger, die Cartaninvarianten von Brauer-Korrespondenten zu verwenden. Besonders interessant sind dabei die Cartaninvarianten von Blöcken b aus B-Elementen (u,b). Ist u eine Involution, so sind die entsprechenden verallgemeinerten Zerlegungszahlen $d^u_{\chi\varphi}$ ganzzahlig, und man kann den Beweis von Theorem A in [63] problemlos übertragen. Wir zeigen, dass dies auch richtig bleibt, solange man Hauptpaare betrachtet.

Lemma 5.4. *Sei B ein 2-Block RG und (u,b) ein B-Element, sodass $(\langle u\rangle,b)$ ein Hauptpaar ist. Außerdem sei $C_b = (c_{ij})$ die Cartanmatrix von b. Für jede positiv definite, ganzzahlige quadratische Form*

$$q(x_1,\ldots,x_{l(b)}) = \sum_{1\le i\le j\le l(b)} q_{ij}x_ix_j$$

gilt dann

$$k(B) \le \sum_{1\le i\le j\le l(b)} q_{ij}c_{ij}.$$

Beweis. Sei 2^n die Ordnung von u und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 2^n-te Einheitswurzel. Dann liegen die verallgemeinerten Zerlegungszahlen d_{ij}^u in $\mathbb{Z}[\zeta] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta + \ldots + \mathbb{Z}\zeta^d$ mit $d = 2^{n-1} - 1$. Wir können also $d_{ij}^u = a_{ij}^0 + a_{ij}^1\zeta + \ldots + a_{ij}^d\zeta^d$ mit $a_{ij}^m \in \mathbb{Z}$ für $m = 0, \ldots, d$, $i = 1, \ldots, k(B)$ und $j = 1, \ldots, l(b)$ schreiben. Außerdem setzen wir $d_i = (d_{i1}^u, \ldots, d_{i,l(b)}^u)$ und $a_i^m = (a_{i1}^m, \ldots, a_{i,l(b)}^m)$ für $i = 1, \ldots, k(B)$ und $m = 0, \ldots, d$. Da $(\langle u\rangle, b)$ ein Hauptpaar ist, können für ein festes $i \in \{1, \ldots, k(B)\}$ nicht alle Zeilen a_i^m mit $m = 0, \ldots, d$ verschwinden. Schließlich fassen wir die Koeffizienten der quadratischen Form in der Matrix $Q = (\widetilde{q}_{ij})$ mit

$$\widetilde{q}_{ij} := \begin{cases} q_{ij} & \text{falls } i = j \\ q_{ij}/2 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

zusammen. Da $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ sind, folgt nun

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le l(b)} q_{ij}c_{ij} &= \sum_{1\le i\le j\le l(b)} \sum_{r=1}^{k(B)} q_{ij}d_{ri}^u\overline{d_{rj}^u} = \sum_{r=1}^{k(B)} d_rQ\overline{d_r}^{\mathrm{T}} \\ &= \sum_{r=1}^{k(B)}\sum_{s=0}^{d}\Big(\sum_{i-j=s} a_r^iQ(a_r^j)^{\mathrm{T}} - \sum_{i-j=s-2^{n-1}} a_r^iQ(a_r^j)^{\mathrm{T}}\Big)\zeta^s \\ &= \sum_{r=1}^{k(B)}\sum_{i=0}^{d} a_r^iQ(a_r^i)^{\mathrm{T}} \ge k(B). \end{aligned}$$ □

Wir können nun Brauers $k(B)$-Vermutung in einigen Spezialfällen beweisen. Eine Gruppe G heißt *zentrale Erweiterung* einer Gruppe H mit einer Gruppe N, falls eine Untergruppe $\widetilde{N} \le \mathrm{Z}(G)$ mit $N \cong \widetilde{N}$ und $G/\widetilde{N} \cong H$ existiert.

Satz 5.5. *Brauers $k(B)$-Vermutung gilt für alle 2-Blöcke, deren Defektgruppe eine zentrale Erweiterung einer metazyklischen Gruppe mit einer zyklischen Gruppe ist. Insbesondere gilt die $k(B)$-Vermutung für 2-Blöcke mit abelschen Defektgruppen vom Rang höchstens 3.*

Beweis. Sei B ein 2-Block mit Defektgruppe D wie in der Aussage des Satzes. Dann gibt es eine zyklische Untergruppe $N \le \mathrm{Z}(D)$, sodass D/N metazyklisch ist. Sei u ein Erzeuger von N und (u, b) ein B-Element. Wegen $u \in \mathrm{Z}(D)$ ist $(\langle u\rangle, b)$ ein Hauptpaar. Wie üblich dominiert b einen Block $\overline{b} \in \mathrm{Bl}(R[\mathrm{C}_G(u)/\langle u\rangle])$ mit Defektgruppe $D/\langle u\rangle = D/N$. Nach Lemma 5.4 genügt es also die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{l(B)} c_{ii} - \sum_{i=1}^{l(B)-1} c_{i,i+1} \le |D| \tag{5.1}$$

für 2-Blöcke B mit metazyklischer Defektgruppe D und Cartanmatrix $C = (c_{ij})$ (bis auf Äquivalenz) zu zeigen. Dabei können wir offensichtlich annehmen, dass B nichtnilpotent ist. Ist $D \cong C_{2^s}^2$ für ein $s \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\sum_{i=1}^{l(B)} c_{ii} - \sum_{i=1}^{l(B)-1} c_{i,i+1} = \frac{|D| + 8}{3} \le |D|$$

aus Satz 3.11. Sei nun D eine Diedergruppe. Nach Proposition (4G) in [19] ist $\det C = |D|$. In diesem Fall liefert der Beweis von Satz 5.3 die Behauptung. Nehmen wir jetzt an, dass

D eine Quaternionengruppe oder eine Semidiedergruppe ist. Theorem 1 in [25] zeigt dann, dass die Äquivalenzklasse von C nur von dem Fusionssystem der B-Unterpaare abhängt. Ist D eine Quaternionengruppe, so sieht man leicht, dass $\mathrm{C}_G(\mathrm{Z}(D))$ dieses Fusionssystem kontrolliert. Man kann also $G = \mathrm{C}_G(\mathrm{Z}(D))$ annehmen. Dann ist C aber genau das Doppelte der Cartanmatrix eines Blocks mit Defektgruppe $D/\mathrm{Z}(D)$. Da $D/\mathrm{Z}(D)$ eine Diedergruppe ist, folgt auch hier die Behauptung. Sei schließlich D eine Semidiedergruppe. Für $l(B) = 2$ gibt es dann zwei mögliche Fusionssysteme. Eines von diesen wird wieder von $\mathrm{C}_G(\mathrm{Z}(D))$ kontrolliert (falls Q_8 die einzige $\mathcal{F}$-essentielle Untergruppe ist). Für das andere Fusionssystem gilt $\det C = |D|$ (siehe Seite 192 in [29]). Wir können also $l(B) = 3$ annehmen. Dann ist die Äquivalenzklasse von C eindeutig bestimmt. Wie im Beweis von Theorem 2.6 in [99] existiert stets eine Primzahlpotenz $q \equiv 3 \pmod 4$, sodass D eine 2-Sylowgruppe von $G := \mathrm{PSL}(3, q)$ ist. Für den Hauptblock $B := B_0(RG)$ tritt dann Fall $SD(3\mathcal{B})_1$ auf Seite 300 in [31] ein. Folglich ist

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & |D|/4+1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

und Ungleichung (5.1) ist erfüllt. Nach Satz 3.11 ist die Behauptung also bewiesen. □

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass Brauer die $k(B)$-Vermutung für beliebige p-Blöcke mit abelschen Defektgruppen vom Rank kleiner gleich 2 bewiesen hat (siehe (7D) in [17]). In offensichtlicher Weise kann man Satz 5.5 auch für minimal nichtabelsche Defektgruppen formulieren, wobei man jedoch die Familie mit $r = s \ge 3$ weglassen muss (siehe 4.1.2). Nach den Sätzen in [59] gilt die Aussage auch für zentrale Erweiterungen von $C_4 \wr C_2$ mit einer zyklischen Gruppe. Die kleinste 2-Gruppe, die die Bedingung aus Satz 5.5 nicht erfüllt, ist die elementarabelsche Gruppe der Ordnung 16. Mit etwas mehr Aufwand kann man die $k(B)$-Vermutung jedoch auch für diese Gruppe bestätigen.

Satz 5.6. *Brauers $k(B)$-Vermutung gilt für alle Blöcke, deren Defektgruppe eine zyklische zentrale Untergruppe vom Index höchstens 8 enthält.*

Beweis. Ist p ungerade, so müssen die Defektgruppen nach Voraussetzung abelsch vom Rang höchstens 2 sein. Nach Satz 5.5 genügt es also, zentrale Erweiterungen von C_2^3 mit einer zyklischen Gruppe zu betrachten. Wir argumentieren wie im Beweis von Satz 5.5. Sei also B ein Block mit Defektgruppe $D \cong C_2^3$ und Cartanmatrix $C = (c_{ij})$. Der Trägheitsindex $t(B)$ ist ein ungerader Teiler von $|\mathrm{Aut}(D)| = |\mathrm{GL}(3, 2)| = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Für $t(B) = 1$ ist auch $l(B) = 1$, und die Ungleichung (5.1) gilt.

Sei nun $t(B) = 3$. Nach Satz 1.39 gibt es dann bis auf Konjugation genau vier B-Elemente $(1, B)$, (u_1, b_1), (u_2, b_2) und (u_3, b_3). Dabei kann man $l(b_1) = 3$ und $l(b_2) = l(b_3) = 1$ annehmen. Nach Lemma 4.28 gilt $k(B) = 8$ und $l(B) = 3$. Die Cartanmatrix von b_1 ist zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Daher sieht man leicht, dass die verallgemeinerten Zerlegungszahlen bzgl. u_1,

u_2 und u_3 (bis auf Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix) in der Form

$$Q_u := \begin{pmatrix} 1 & . & . & 1 & 1 \\ 1 & . & . & 1 & -1 \\ 1 & 1 & . & -1 & 1 \\ 1 & 1 & . & -1 & -1 \\ . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 & 1 & -1 \\ . & . & 1 & -1 & 1 \\ . & . & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

angeordnet werden können. Nun erhält man die gewöhnliche Zerlegungsmatrix Q als Orthogonalraum der Spalten von Q_u, das heißt, es existiert eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Q})$ mit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ -1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & -1 & . \\ . & . & 1 \\ . & . & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} S$$

(siehe auch Beweis von Satz 4.17). Man sieht leicht, dass S nur ganzzahlige Einträge hat. Bekanntlich existiert eine Matrix $\widetilde{Q} \in \mathbb{Z}^{3\times 8}$, sodass $\widetilde{Q}Q$ die Einheitsmatrix ist. Daraus folgt nun $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$. Also hat die Cartanmatrix von B bis auf Äquivalenz die Gestalt $S^{-\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QS^{-1}$. Dies bestätigt die Ungleichung (5.1). (Man könnte in diesem Fall auch mit der im Allgemeinen unbewiesenen Behauptung von Usami und Puig argumentieren.)

Sei nun $t(B) = 7$. Dann gibt es bis auf Konjugation nur zwei B-Elemente $(1, B)$ und (u, b) mit $k(B) - l(B) = l(b) = 1$. Das Skalarprodukt der Spalte $\{d^u_{\chi\varphi} : \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ mit sich selbst liefert eine Darstellung von $|D| = 8$ als Summe von $k(B)$ vielen positiven Quadraten. Im Fall $k(B) = 2$ wäre $4 \nmid k_0(B)$. Also ist $k(B) \in \{5, 8\}$. Sei zunächst $k(B) = 5$ und $l(B) = 4$ (man beachte, dass dieser Fall Brauers Höhe-Null-Vermutung widerspricht). Die verallgemeinerten Zerlegungszahlen $d^u_{\chi\varphi}$ können in der Form $(1, 1, 1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$ angeordnet werden. Somit ergibt sich für die gewöhnliche Zerlegungsmatrix die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . \\ . & 1 & 1 & . \\ . & . & -1 & -2 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist auch hier die Ungleichung (5.1) erfüllt. Im Fall $k(B) = 8$ und $l(B) = 7$ (dieser Fall tritt tatsächlich auf) kann man die Zahlen $d^u_{\chi\varphi}$ in der Form $(1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ anordnen. Die gewöhnliche Zerlegungsmatrix nimmt dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & -1 & -1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & -1 \end{pmatrix}$$

an. Die Behauptung folgt nun wie zuvor.

Sei schließlich $t(B) = 21$. Dann gibt es wieder zwei B-Elemente $(1, B)$ und (u, b) bis auf Konjugation. Dabei gilt $k(B) - l(B) = l(b) = 3$. Nach Satz 5.5 gilt außerdem $k(B) \leq 8$ und $l(B) \leq 5$. Offenbar ist 2 ein doppelter Elementarteiler der Cartanmatrix von b. Mit der Theorie der unteren Defektgruppen folgt damit leicht, dass 2 mindestens ein doppelter Elementarteiler von C ist (siehe letzten Absatz im Beweis von Lemma 4.10). Insbesondere ist $l(B) \geq 3$. Der Fall $l(B) = 3$ widerspricht allerdings Corollary 1.3 in [65]. Sei nun $l(B) = 4$ (auch in diesem Fall wäre Brauers Höhe-Null-Vermutung falsch). Wie üblich kann man dann die Zahlen $d^u_{\chi\varphi}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & . & 1 \\ 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

anordnen. Damit ist die gewöhnliche Zerlegungsmatrix durch

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . \\ . & . & -1 & . \\ . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & -1 \\ . & -1 & . & 1 \\ -1 & . & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Schließlich erhält man

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist die Ungleichung (5.1) nicht mehr erfüllt. Hier kann man jedoch Lemma 5.4 mit einer anderen quadratischen Form q anwenden. Zum Beispiel kann man für q die quadratische Form wählen, welche der positiv definiten Matrix

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & . \\ -1 & 2 & -1 & . \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

entspricht. Betrachten wir nun den Fall $l(B) = 5$ (dieser Fall tritt tatsächlich auf). Die Zahlen $d^u_{\chi\varphi}$ bilden die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 1 & . & . \\ 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . \\ . & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 \\ . & . & 1 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Die gewöhnliche Zerlegungsmatrix ist dann

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ -1 & . & . & . & -1 \\ . & 1 & . & . & 1 \\ . & -1 & . & . & . \\ . & . & -1 & . & -1 \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & -1 & . \end{pmatrix},$$

und die Cartanmatrix wird zu

$$\begin{pmatrix} 2 & . & . & . & 1 \\ . & 2 & . & . & 1 \\ . & . & 2 & . & 1 \\ . & . & . & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hier kann man Lemma 5.4 mit der zur positiv definiten Matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & . & . & -1 \\ 1 & 2 & . & . & -1 \\ . & . & 2 & . & -1 \\ . & . & . & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gehörenden quadratischen Form q anwenden. □

Kessar, Koshitani und Linckelmann haben kürzlich gezeigt, dass die Fälle $k(B) = 5$ und $k(B) = 7$ im letzten Beweis nicht auftreten können (siehe [51]). Allerdings haben sie für diese Aussage die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen benutzt.

Als Folgerung des letzten Satzes erhält man die $k(B)$-Vermutung für 2-Blöcke mit „kleinem" Defekt.

Satz 5.7. *Brauers $k(B)$-Vermutung gilt für alle 2-Blöcke mit Defekt $d \leq 4$.*

Robinson hatte bereits gezeigt, dass $k(B) \leq 2^5$ für jeden 2-Block mit Defekt 4 gilt (siehe [86]). Im Allgemeinen gilt die $k(B)$-Vermutung bekanntlich für p-Blöcke mit Defekt $d \leq 2$. Mit GAP kann man zeigen, dass 35 der 51 Gruppen der Ordnung 32 mindestens eine der Bedingungen aus den letzten Sätzen erfüllen. Von den verbleibenden 16 Gruppen führen vier ausschließlich zu nilpotenten Fusionssystemen und Blöcken (vergleiche mit [99]).

6 Ausblick

6.1 Produkte von zwei zyklischen Untergruppen

Jede metazyklische Gruppe lässt sich offenbar als Produkt von zwei zyklischen Untergruppen schreiben. Wir bezeichnen Gruppen mit dieser Eigenschaft als *bizyklisch*. Für p-Gruppen mit einer ungeraden Primzahl p ist bizyklisch äquivalent zu metazyklisch (siehe Satz III.11.5 in [45]). Für 2-Gruppen gilt dies nicht, wie bereits die minimal nichtabelsche Gruppe

$$\langle x, y \mid x^4 = y^2 = [x, y]^2 = [x, x, y] = [y, x, y] = 1\rangle = \langle x\rangle\langle xy\rangle$$

der Ordnung 16 zeigt. Dieses Beispiel zeigt auch, dass sich die Eigenschaft bizyklisch nicht auf Untergruppen überträgt. Offenbar sind aber Faktorgruppen bizyklischer Gruppen wieder bizyklisch. Huppert hat in [44] einige Ergebnisse über bizyklische Gruppen bewiesen. Ist zum Beispiel $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ eine bizyklische p-Gruppe, so sind die Mengen $\langle a^i\rangle\langle b^j\rangle$ mit $i, j \in \mathbb{Z}$ Untergruppen von G. Weitere ältere Resultate über bizyklische Gruppen findet man in [11, 47, 48]. In der neueren Arbeit [49] von Janko wurde folgende Klassifizierung bizyklischer 2-Gruppen bewiesen (siehe auch §87 in [10]).

Satz 6.1. *Eine nichtmetazyklische 2-Gruppe P ist genau dann bizyklisch, wenn sie sich durch zwei Elemente erzeugen lässt und genau eine nichtmetazyklische maximale Untergruppe enthält.*

Mit dieser Aussage konnte Janko auch alle bizyklischen 2-Gruppen durch Angabe von Erzeugern und Relationen beschreiben. Insbesondere sind die minimal nichtabelschen 2-Gruppen aus Abschnitt 4.2 bizyklisch (siehe Theorem 4.1 in [49]). Allerdings konnte nicht geklärt werden, welche dieser Gruppen möglicherweise isomorph sind. Insbesondere ist die Anzahl der Isomorphieklassen bizyklischer 2-Gruppen unbekannt.

Wie üblich ist es beim Studium von Blöcken wichtig, Fusionssysteme zu untersuchen. Dafür wiederum ist es notwendig, Automorphismengruppen zu berechnen. Im Hinblick auf bizyklische Gruppen ist die folgende Verallgemeinerung von Satz 3.1 also ein erster Schritt.

Satz 6.2. *Sei P eine bizyklische 2-Gruppe, sodass $\mathrm{Aut}(P)$ keine 2-Gruppe ist. Dann ist $P \cong Q_8$ oder $P \cong C_{2^k}^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Nach Satz 3.1 können wir annehmen, dass P nichtmetazyklisch ist. Da sich P durch zwei Elemente erzeugen lässt, ist $|P/\Phi(P)| = 4$. Nach Satz 6.1 kann kein Automorphismus von P transitiv auf $(P/\Phi(P)) \setminus \{1\}$ operieren. Dies zeigt die Behauptung. □

Damit können wir Fusionssysteme in einem Spezialfall untersuchen.

Satz 6.3. *Sei P eine bizyklische 2-Gruppe mit einem elementarabelschen Normalteiler der Ordnung 8. Ist $|P'| = 2$, so ist P eine minimal nichtabelsche Gruppe wie in Abschnitt 4.2. Für $|P'| > 2$ ist jedes Fusionssystem auf P nilpotent. Insbesondere kennt man in beiden Fällen die Invarianten eines Blocks mit Defektgruppe P.*

Beweis. Die erste Aussage ist gerade Theorem 4.1 in [49]. Also können wir $|P'| > 2$ annehmen, und Theorem 4.2 in [49] benutzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} &|P| = 2^{n+2}, && C_2^3 \cong E := \langle u, v, z\rangle \trianglelefteq P, && C_{2^n} \cong Z := \langle a\rangle \le P = EZ,\\ &z = a^{2^{n-1}}, && {}^a u = uz, && {}^a v = vu,\\ &P' = \langle u, z\rangle \cong C_2^2, && \mathrm{Z}(P) = \langle a^4\rangle \cong C_{2^{n-2}}, && \Phi(P) = \langle a^2, u\rangle \cong C_{2^{n-1}} \times C_2 \end{aligned}$$

für ein $n \ge 3$. Sei $\mathcal{F}$ ein Fusionssystem auf P, und sei $Q < P$ eine $\mathcal{F}$-essentielle Untergruppe. Die beiden maximalen Untergruppen $\langle a, u\rangle$ und $\langle av, u\rangle$ von P sind offenbar metazyklisch und modular, das heißt zu $M_{2^{n+1}}$ isomorph. Die einzige Untergruppe von $M_{2^{n+1}}$ mit einem nichttrivialen Automorphismus ungerader Ordnung ist $\Omega(M_{2^{n+1}}) \cong C_2^2$. Wegen $|M_{2^{n+1}}| \ge 16$ ist diese Untergruppe aber nicht selbstzentralisierend. Da $\mathrm{Aut}(Q)$ keine 2-Gruppe ist, liegt Q also in der nichtmetazyklischen maximalen Untergruppe $M := E\langle a^2\rangle$. Wegen $\langle a^4, u\rangle = \mathrm{Z}(M) < Q$ folgt damit $Q \in \{\langle a^2, u\rangle, \langle a^4, u, v\rangle, \langle a^4, a^2v, u\rangle, M\}$. Die Möglichkeit $Q = \langle a^2, u\rangle = \Phi(P) \cong C_{2^{n-1}} \times C_2$ ist ausgeschlossen. Offenbar ist $\Phi(M) = \mathrm{Z}(P) = \langle a^4\rangle$. Jeder nichttriviale Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ ungerader Ordnung operiert nichttrivial auf $M/\Phi(M) \cong C_2^3$. Damit operiert α auch nichttrivial auf $M/\mathrm{Z}(M) \cong C_2^2$. Da die maximalen Untergruppen $\langle a^2, u\rangle \cong C_{2^{n-1}} \times C_2$ und $\langle a^4, u, v\rangle \cong C_{2^{n-2}} \times C_2^2$ von M nicht isomorph sind, kann α nicht existieren. Also ist auch $Q = M$ ausgeschlossen.

Sei nun $n = 3$. Betrachten wir zuerst den Fall $Q = \langle a^4, u, v\rangle \cong C_2^3$. Dann ist

$$C_4 \cong P/Q = \mathrm{N}_P(Q)/\mathrm{C}_P(Q) \le \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q) \le \mathrm{Aut}(Q) \cong \mathrm{GL}(3, 2).$$

Aus $\mathrm{O}_2(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)) = 1$ folgt leicht: $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q) = \mathrm{Aut}(Q)$. Dies widerspricht jedoch Satz 1.56. Die gleiche Argumentation funktioniert auch für den Normalteiler $Q = \langle a^4, a^2v, u\rangle \cong C_2^3$.

Sei nun $n \ge 4$. Dann ist $\langle a^4, u, v\rangle \cong C_{2^{n-2}} \times C_2^2$ und $\langle a^4, a^2v, u\rangle = \langle a^2v, u\rangle \cong C_{2^{n-1}} \times C_2$. Es muss also $Q = \langle a^4, u, v\rangle$ gelten. Somit sind 2 und 3 die einzigen Primteiler von $|\mathrm{Aut}(Q)|$. Wegen

$$C_4 \cong P/Q = \mathrm{N}_P(Q)/\mathrm{C}_P(Q) \le \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$$

ist dann aber $\mathrm{O}_2(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)) \ne 1$.

Damit haben wir gezeigt, dass es keine $\mathcal{F}$-essentiellen Untergruppen gibt. Die Behauptung folgt nun mit Alperins Fusionssatz und Satz 6.2. □

Man kann sich nun auf bizyklische 2-Gruppen ohne einen elementarabelschen Normalteiler der Ordnung 8 beschränken. Hier sind nicht alle Fusionssysteme nilpotent. Mit GAP kann man zum Beispiel zeigen, dass die Gruppen `SmallGroup(96,64)`, `SmallGroup(96,66)` und `SmallGroup(96,67)` (aus der „small group library“) der Ordnung 96 nicht 2-nilpotent sind, aber bizyklische 2-Sylowgruppen haben.

Man überlegt sich leicht, dass das eingangs erwähnte Beispiel der minimal nichtabelschen Gruppe der Ordnung 16 die einzige nichtmetazyklische bizyklische Gruppe der Ordnung 16 ist. Für eine bizyklische Gruppe G gilt offenbar $|G| \le (\exp G)^2$, wobei $\exp G$ der Exponent von G ist. Damit sieht man umgekehrt, dass die minimal nichtabelschen 2-Gruppen aus Abschnitt 4.1 nicht bizyklisch sind.

6.2 Weitere Familien von 2-Gruppen

Wie in Abschnitt 4.2.1 ist es für die Berechnung der Zahlen $k(B)$, $k_i(B)$ und $l(B)$ äußerst hilfreich, wenn die Defektgruppe eine zyklische Untergruppe von möglichst „kleinem" Index enthält (in Abschnitt 4.2.1 war dieser Index 4). Die 2-Gruppen mit einer zyklischen Untergruppe vom Index 2 sind bekanntlich alle metazyklisch. Die 2-Gruppen mit einer zyklischen Untergruppe vom Index 4 wurden in [74] klassifiziert (siehe auch Theorem 74.2 in [10]). Mit Hilfe dieser Klassifikation könnte man Blöcke mit entsprechenden Defektgruppen betrachten.

Interessant wären auch die vier minimal nichtmetazyklischen 2-Gruppen (siehe Theorem 66.1 in [10]). Unter diesen befindet sich jedoch auch die Gruppe C_2^3.

Um „große" elementarabelsche Untergruppen zu vermeiden, könnte man auch 2-Gruppen mit genau drei Involutionen untersuchen (siehe §82 in [10]). Diese Klasse schließt alle metazyklischen 2-Gruppen außer den zyklischen und den 2-Gruppen maximaler Klasse ein (siehe Beweis von Satz 3.9).

Wir beschreiben noch eine weitere Familie von 2-Gruppen. Dafür definieren wir den 2-*Rang* einer Gruppe G als den maximalen Rang einer abelschen 2-Untergruppe von G. Die nichttrivialen zyklischen 2-Gruppen und die Quaternionengruppen haben 2-Rang 1. Alle anderen metazyklischen 2-Gruppen haben 2-Rang 2. Es wäre daher auch naheliegend, 2-Blöcke mit Defektgruppen vom 2-Rang 2 zu studieren. Diese Familie enthält zum Beispiel auch Kranzprodukte vom Typ $C_{2^n} \wr C_2$, wie sie in [59] betrachtet wurden. Außerdem beinhaltet sie die 2-Gruppen mit genau drei Involutionen. Als Anhaltspunkt könnte hier die Arbeit [4] dienen, in der einfache Gruppen vom 2-Rang 2 klassifiziert wurden. Neben den bekannten Gruppen (C_2^2, D_{2^n}, SD_{2^n} und $C_{2^n} \wr C_2$) tritt dabei als einzige Ausnahme die 2-Sylowgruppe von $\mathrm{PSU}(3,4)$ der Ordnung 64 auf. Diese Gruppe besitzt genau drei Involutionen und Automorphismen der Ordnung 3 und 5. Dies könnte einige Schwierigkeiten bereiten, denn schon für den Hauptblock $B := B_0(\mathrm{PSU}(3,4))$ gilt: $t(B) = l(B) = 15$.

Stichwortverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] A. M. Alghamdi, *Dade's projective conjecture for p-block with an extra-special defect group*, Int. J. Algebra **4** (2010), 525–534.

[2] A. M. Alghamdi, *Ordinary weight conjecture implies Brauer's* $k(B)$*-conjecture*, Int. J. Algebra **4** (2010), 615–618.

[3] J. L. Alperin, *Weights for finite groups*, in The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Humboldt State Univ., Arcata, 1986), 369–379, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 47.1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.

[4] J. L. Alperin, R. Brauer und D. Gorenstein, *Finite simple groups of* 2*-rank two*, Scripta Math. **29** (1973), 191–214.

[5] J. L. Alperin und M. Broué, *Local methods in block theory*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), 143–157.

[6] L. Barker, *On p-soluble groups and the number of simple modules associated with a given Brauer pair*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 133–160.

[7] E. S. Barnes, *Minkowski's fundamental inequality for reduced positive quadratic forms*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **26** (1978), 46–52.

[8] B. G. Basmaji, *On the isomorphisms of two metacyclic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 175–182.

[9] H. Bender, *Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt*, J. Algebra **17** (1971), 527–554.

[10] Y. Berkovich und Z. Janko, *Groups of prime power order. Vol. 2*, de Gruyter Expositions in Mathematics, Vol. 47, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.

[11] N. Blackburn, *Über das Produkt von zwei zyklischen* 2*-Gruppen*, Math. Z. **68** (1958), 422–427.

[12] J. Brandt, *A lower bound for the number of irreducible characters in a block*, J. Algebra **74** (1982), 509–515.

[13] R. Brauer, *On the connection between the ordinary and the modular characters of groups of finite order*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 926–935.

[14] R. Brauer, *Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups. I*, J. Algebra **1** (1964), 152–167.

[15] R. Brauer, *Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups. II*, J. Algebra **1** (1964), 307–334.

[16] R. Brauer, *On blocks and sections in finite groups. I*, Amer. J. Math. **89** (1967), 1115–1136.

[17] R. Brauer, *On blocks and sections in finite groups. II*, Amer. J. Math. **90** (1968), 895–925.

[18] R. Brauer, *Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups. IV*, J. Algebra **17** (1971), 489–521.

[19] R. Brauer, *On 2-blocks with dihedral defect groups*, in Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni (INDAM, Rome, 1972), 367–393, Symposia Mathematica, Vol. XIII, Academic Press, London, 1974.

[20] R. Brauer, *On the structure of blocks of characters of finite groups*, in Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973), 103–130, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 372, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[21] M. Broué, *On characters of height zero*, in The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, 1979), 393–396, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 37, American Mathematical Society, Providence, RI, 1980.

[22] M. Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque (1990), 61–92.

[23] M. Broué, *Equivalences of blocks of group algebras*, in Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992), 1–26, NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 424, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[24] D. A. Buell, *Binary quadratic forms*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[25] M. Cabanes und C. Picaronny, *Types of blocks with dihedral or quaternion defect groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **39** (1992), 141–161.

[26] M. J. Collins, *Representations and characters of finite groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 22, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[27] E. C. Dade, *Blocks with cyclic defect groups*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 20–48.

[28] E. C. Dade, *Counting characters in blocks. I*, Invent. Math. **109** (1992), 187–210.

[29] P. W. Donovan, *Dihedral defect groups*, J. Algebra **56** (1979), 184–206.

[30] S. Ensslen und B. Külshammer, *A note on blocks with dihedral defect groups*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 205–211.

[31] K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1428, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[32] W. Feit, *The representation theory of finite groups*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 25, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

[33] P. Fong, *Some properties of characters of finite solvable groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 116–117.

[34] P. Fong, *On the characters of p-solvable groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **98** (1961), 263–284.

[35] M. Fujii, *On determinants of Cartan matrices of p-blocks*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **56** (1980), 401–403.

[36] F. R. Gantmacher, *Matrizentheorie*, Hochschulbücher für Mathematik, Band 86, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.

[37] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*; 2008, (`http://www.gap-system.org`).

[38] D. Gorenstein, R. Lyons und R. Solomon, *The classification of the finite simple groups*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 40.I, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[39] C. E. Hempel, *Metacyclic Groups*, Comm. Algebra **28** (2000), 3865–3897.

[40] S. Hendren, *Extra special defect groups of order p^3 and exponent p^2*, J. Algebra **291** (2005), 457–491.

[41] S. Hendren, *Extra special defect groups of order p^3 and exponent p*, J. Algebra **313** (2007), 724–760.

[42] M. Holloway, S. Koshitani und N. Kunugi, *Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p*, Arch. Math. (Basel) **94** (2010), 101–116.

[43] J. Howie, V. Metaftsis und R. M. Thomas, *Finite generalized triangle groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 3613–3623.

[44] B. Huppert, *Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen*, Math. Z. **58** (1953), 243–264.

[45] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[46] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006.

[47] N. Itô und A. Ôhara, *Sur les groupes factorisables par deux* 2*-groupes cycliques. I. Cas où leur groupe des commutateurs est cyclique*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 736–740.

[48] N. Itô und A. Ôhara, *Sur les groupes factorisables par deux* 2*-groupes cycliques. II. Cas où leur groupe des commutateurs n'est pas cyclique*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 741–743.

[49] Z. Janko, *Finite 2-groups with exactly one nonmetacyclic maximal subgroup*, Israel J. Math. **166** (2008), 313–347.

[50] R. Kessar, *Introduction to block theory*, in Group representation theory, 47–77, EPFL Press, Lausanne, 2007.

[51] R. Kessar, S. Koshitani und M. Linckelmann, *Conjectures of Alperin and Broué for* 2*-blocks with elementary abelian defect groups of order* 8, `http://arxiv.org/abs/1012.3553`.

[52] R. Kessar und M. Linckelmann, *On perfect isometries for tame blocks*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 46–54.

[53] R. Kessar und M. Linckelmann, *On stable equivalences and blocks with one simple module*, J. Algebra **323** (2010), 1607–1621.

[54] B. W. King, *Presentations of metacyclic groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **8** (1973), 103–131.

[55] M. Kiyota, *On* 3*-blocks with an elementary abelian defect group of order* 9, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **31** (1984), 33–58.

[56] S. Koshitani und N. Kunugi, *Broué's conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9*, J. Algebra **248** (2002), 575–604.

[57] S. Koshitani und H. Miyachi, *Donovan conjecture and Loewy length for principal 3-blocks of finite groups with elementary abelian Sylow 3-subgroup of order 9*, Comm. Algebra **29** (2001), 4509–4522.

[58] H. Kurzweil und B. Stellmacher, *The theory of finite groups*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2004.

[59] B. Külshammer, *On 2-blocks with wreathed defect groups*, J. Algebra **64** (1980), 529–555.

[60] B. Külshammer, *Crossed products and blocks with normal defect groups*, Comm. Algebra **13** (1985), 147–168.

[61] B. Külshammer und T. Okuyama, *On centrally controlled blocks of finite groups*, unveröffentlicht.

[62] B. Külshammer und L. Puig, *Extensions of nilpotent blocks*, Invent. Math. **102** (1990), 17–71.

[63] B. Külshammer und T. Wada, *Some inequalities between invariants of blocks*, Arch. Math. (Basel) **79** (2002), 81–86.

[64] P. Landrock, *A counterexample to a conjecture on the Cartan invariants of a group algebra*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 223–224.

[65] P. Landrock, *On the number of irreducible characters in a* 2*-block*, J. Algebra **68** (1981), 426–442.

[66] S. Liedahl, *Enumeration of metacyclic p-groups*, J. Algebra **186** (1996), 436-446.

[67] M. Linckelmann, *Introduction to fusion systems*, in Group representation theory, 79–113, EPFL Press, Lausanne, 2007.

[68] V. D. Mazurov, *Finite groups with metacyclic Sylow 2-subgroups*, Sibirsk. Mat. Ž. **8** (1967), 966–982.

[69] A. Moretó und G. Navarro, *Heights of characters in blocks of p-solvable groups*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 373–380.

[70] H. Nagao und Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[71] G. Nebe und N. Sloane, *The Brandt-Intrau-Schiemann table of even ternary quadratic forms*, `http://www2.research.att.com/~njas/lattices/Brandt_2.html`, gesichtet am 15. 06. 2010.

[72] G. Nebe und N. Sloane, *The Brandt-Intrau-Schiemann table of odd ternary quadratic forms*, `http://www2.research.att.com/~njas/lattices/Brandt_1.html`, gesichtet am 15. 06. 2010.

[73] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[74] Y. Ninomiya, *Finite p-groups with cyclic subgroups of index p^2*, Math. J. Okayama Univ. **36** (1994), 1–21 (1995).

[75] T. Okuyama und M. Wajima, *Irreducible characters of p-solvable groups*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), 309–312.

[76] J. B. Olsson, *On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups*, J. Algebra **36** (1975), 212–241.

[77] J. B. Olsson, *On the subsections for certain 2-blocks*, J. Algebra **46** (1977), 497–510.

[78] J. B. Olsson, *Lower defect groups*, Comm. Algebra **8** (1980), 261–288.

[79] J. B. Olsson, *Inequalities for block-theoretic invariants*, in Representations of algebras (Puebla, 1980), 270–284, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 903, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[80] J. B. Olsson, *On subpairs and modular representation theory*, J. Algebra **76** (1982), 261–279.

[81] J. B. Olsson und K. Uno, *Dade's Conjectures*, `http://www.math.ku.dk/~olsson/links/dade.html`, gesichtet am 15. 06. 2010.

[82] L. Puig, *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent. Math. **93** (1988), 77–116.

[83] L. Puig und Y. Usami, *Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients*, J. Algebra **160** (1993), 192–225.

[84] L. Puig und Y. Usami, *Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and cyclic inertial quotients of order* 4, J. Algebra **172** (1995), 205–213.

[85] W. F. Reynolds, *Blocks and normal subgroups of finite groups*, Nagoya Math. J. **22** (1963), 15–32.

[86] G. R. Robinson, *On the number of characters in a block and the Brauer-Feit matrix*, unveröffentlicht.

[87] G. R. Robinson, *On Brauer's $k(B)$ problem*, J. Algebra **147** (1992), 450–455.

[88] G. R. Robinson, *Dade's projective conjecture for p-solvable groups*, J. Algebra **229** (2000), 234–248.

[89] G. R. Robinson, *Large character heights, $Qd(p)$, and the ordinary weight conjecture*, J. Algebra **319** (2008), 657–679.

[90] L. Rédei, *Das „schiefe Produkt“ in der Gruppentheorie*, Comment. Math. Helv. **20** (1947), 225–264.

[91] P. Schmid, *The solution of the $k(GV)$ problem*, ICP Advanced Texts in Mathematics, Vol. 4, Imperial College Press, London, 2007.

[92] R. Stancu, *Control of fusion in fusion systems*, J. Algebra Appl. **5** (2006), 817–837.

[93] K. Uno, *Dade's conjecture for tame blocks*, Osaka J. Math. **31** (1994), 747–772.

[94] Y. Usami, *On p-blocks with abelian defect groups and inertial index* 2 *or* 3. *I*, J. Algebra **119** (1988), 123–146.

[95] Y. Usami, *On p-blocks with abelian defect groups and inertial index* 2 *or* 3. *II*, J. Algebra **122** (1989), 98–105.

[96] Y. Usami, *Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and dihedral inertial quotients of order* 6, J. Algebra **172** (1995), 113–125.

[97] Y. Usami, *Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to* $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$, J. Algebra **181** (1996), 727–759.

[98] Y. Usami, *Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to* $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, J. Algebra **182** (1996), 140–164.

[99] R. W. van der Waall, *On p-nilpotent forcing groups*, Indag. Math. (N.S.) **2** (1991), 367–384.

[100] B. L. van der Waerden und H. Gross, *Studien zur Theorie der quadratischen Formen*, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 34, Birkhäuser Verlag, Basel, 1968.

[101] A. Watanabe, *Note on a p-block of a finite group with abelian defect group*, Osaka J. Math. **26** (1989), 829–836.

[102] A. Watanabe, *Note on a p-block of a finite group with abelian defect group. II*, Osaka J. Math. **28** (1991), 85–92.

[103] A. Watanabe, *Notes on p-blocks of characters of finite groups*, J. Algebra **136** (1991), 109–116.

[104] M. Xu und Q. Zhang, *A classification of metacyclic 2-groups*, Algebra Colloq. **13** (2006), 25–34.

Lebenslauf

Zur Person

Name	Benjamin Sambale
Geburtstag	10. 04. 1985
Geburtsort	Leipzig
E-Mail-Adresse	`benjamin.sambale@uni-jena.de`

Schulbildung

1992 – 1994	Grundschule in Bad Berka
1995 – 1996	Grundschule Blankenhain
1996 – 2004	Marie-Curie-Gymnasium Schulteil Blankenhain
23. 06. 2004	Schulabschluss: Allgemeine Hochschulreife

Studium

10/2004 – 03/2005	Studium an der Friedrich-Schiller-Universität Jena im Studiengang Informatik Diplom
04/2005 – 09/2006	Wechsel zum Studiengang Mathematik Diplom mit Nebenfach Informatik
06. 09. 2006	Abschluss des Grundstudiums: Vordiplom
10/2006 – 11/2008	Hauptstudium, Spezialisierung: Algebra
19. 11. 2008	Studienabschluss: Diplom mit Auszeichnung
ab 12/2008	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Friedrich-Schiller-Universität Jena
22. 10. 2009	Examenspreis 2009 der Fakultät für Mathematik und Informatik

Veröffentlichungen und Vorträge

– *Konjugationsklassen und Charaktere in endlichen p-Gruppen*, Studierendenkonferenz der DMV 2009, Bochum

– (zusammen mit B. Külshammer und L. Héthelyi), *Conjugacy classes and characters of finite p-groups*, erscheint in Comm. Algebra, 2009

– *Offene Probleme der Gruppentheorie*, Tag der Fakultät 2009, Jena

– *Fusion systems on metacyclic 2-groups*, `http://arxiv.org/abs/0908.0783`, 2009

– *Blocks with metacyclic defect groups*, Darstellungstheorietage 2009, Jena

– *Cartan matrices and Brauer's $k(B)$-conjecture*, erscheint in J. Algebra, 2010

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich,

- dass mir die Promotionsordnung der Fakultät bekannt ist,
- dass ich die Dissertation selbst angefertigt habe, keine Textabschnitte oder Ergebnisse eines Dritten oder eigene Prüfungsarbeiten ohne Kennzeichnung übernommen und alle von mir benutzten Hilfsmittel, persönliche Mitteilungen und Quellen in meiner Arbeit angegeben habe,
- dass ich die Hilfe eines Promotionsberaters nicht in Anspruch genommen habe und dass Dritte weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen von mir für Arbeiten erhalten haben, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen,
- dass ich die Dissertation noch nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder andere wissenschaftliche Prüfung eingereicht habe.

Bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskripts haben mich folgende Personen unterstützt: Prof. Dr. Burkhard Külshammer

Ich habe die gleiche, eine in wesentlichen Teilen ähnliche bzw. eine andere Abhandlung bereits bei einer anderen Hochschule als Dissertation eingereicht: Nein.

Jena, den 29. 11. 2010