Blocks of finite groups and their invariants

Benjamin Sambale

Habilitationsverteidigung

13. 11. 2013

Einführung

- Eine Gruppe G ist eine (abstrakte) Menge von Elementen.

Einführung

- Eine Gruppe G ist eine (abstrakte) Menge von Elementen.
- Je zwei Elemente können nach gewissen Regeln zu einem neuen Gruppenelement verknüpft werden.

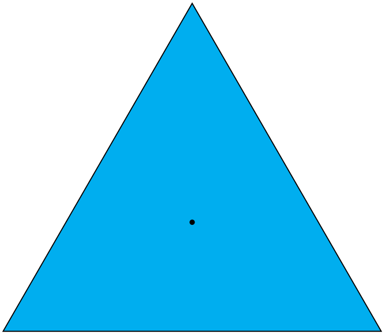
Einführung

- Eine Gruppe G ist eine (abstrakte) Menge von Elementen.
- Je zwei Elemente können nach gewissen Regeln zu einem neuen Gruppenelement verknüpft werden.

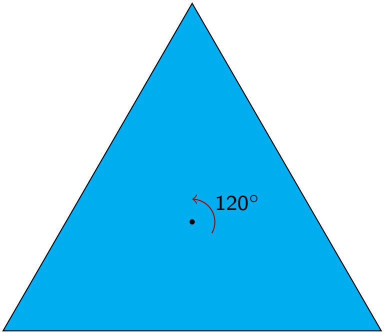
Beispiel (Dreieck)

Die Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks bilden eine Gruppe D_6. Die Verknüpfung ist dabei die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

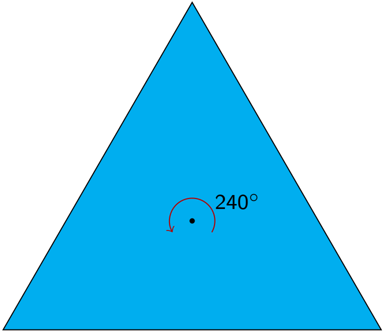
Beispiel



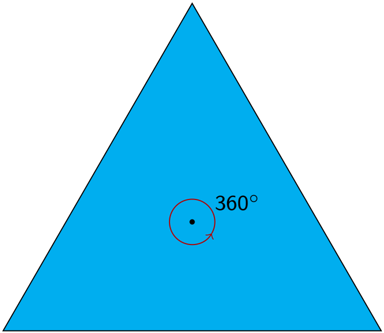
Beispiel



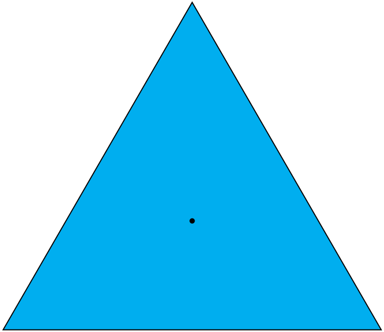
Beispiel



Beispiel

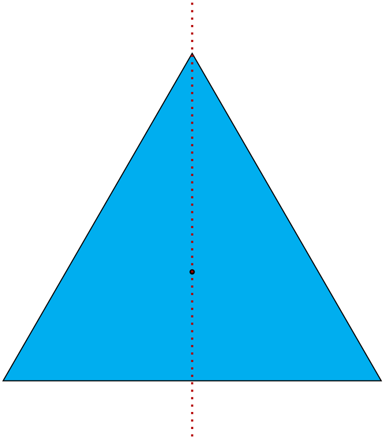


Beispiel



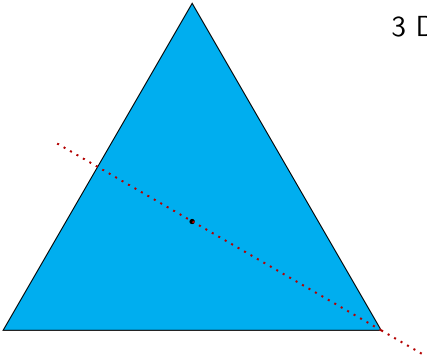
3 Drehungen

Beispiel



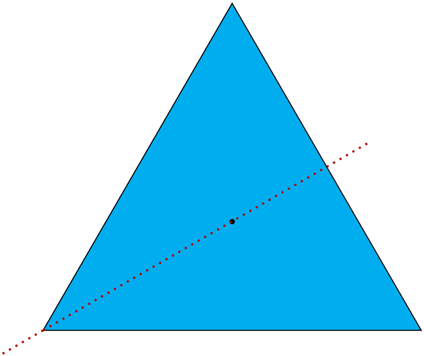
3 Drehungen

Beispiel



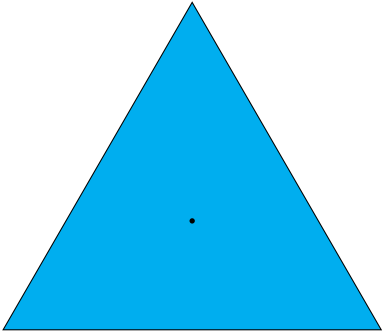
3 Drehungen

Beispiel



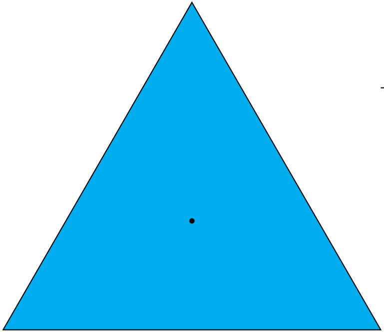
3 Drehungen

Beispiel



3 Drehungen
3 Spiegelungen

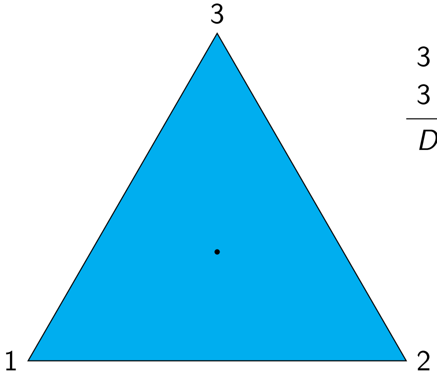
Beispiel



3 Drehungen
3 Spiegelungen

D_6 hat 6 Elemente

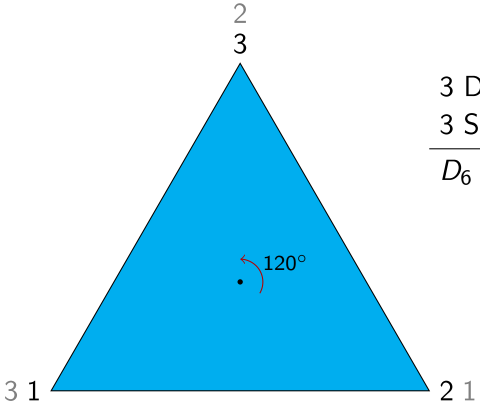
Beispiel



3 Drehungen
3 Spiegelungen

D_6 hat 6 Elemente

Beispiel

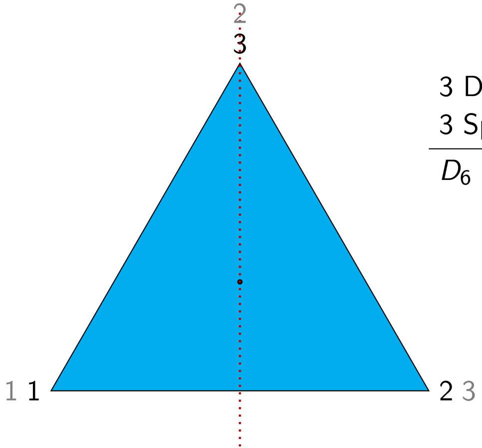


3 Drehungen
3 Spiegelungen

D_6 hat 6 Elemente

120° Drehung

Beispiel



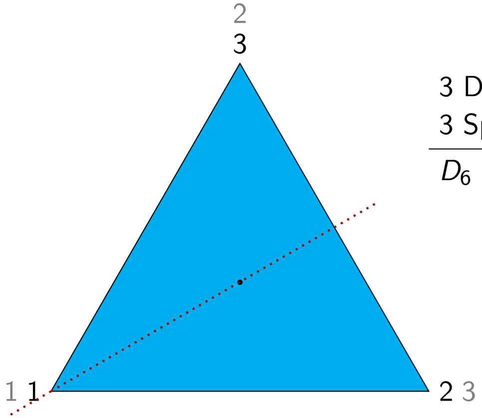
3 Drehungen

3 Spiegelungen

D_6 hat 6 Elemente

120° Drehung + Spiegelung durch P3

Beispiel



3 Drehungen
3 Spiegelungen

D_6 hat 6 Elemente

120° Drehung + Spiegelung durch P3 = Spiegelung durch P1

Darstellungen

- In der Darstellungstheorie versucht man abstrakte Gruppenelemente durch konkrete Matrizen zu ersetzen.

Darstellungen

- In der Darstellungstheorie versucht man abstrakte Gruppenelemente durch konkrete Matrizen zu ersetzen.
- Die Verknüpfung von Gruppenelementen soll dabei der Matrizenmultiplikation entsprechen.

Darstellungen

- In der Darstellungstheorie versucht man abstrakte Gruppenelemente durch konkrete Matrizen zu ersetzen.
- Die Verknüpfung von Gruppenelementen soll dabei der Matrizenmultiplikation entsprechen.

Beispiel (Dreieck)

$$\text{Drehung um } 120^\circ \qquad \longrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Darstellungen

- In der Darstellungstheorie versucht man abstrakte Gruppenelemente durch konkrete Matrizen zu ersetzen.
- Die Verknüpfung von Gruppenelementen soll dabei der Matrizenmultiplikation entsprechen.

Beispiel (Dreieck)

$$\begin{aligned} \text{Drehung um } 120^\circ \quad &\longrightarrow \quad -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Spiegelung an y-Achse} \quad &\longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Charaktere

- Basiswechsel führt zu ähnlichen Matrizen und ähnlichen Darstellungen mit gleichen Eigenschaften.

Charaktere

- Basiswechsel führt zu ähnlichen Matrizen und ähnlichen Darstellungen mit gleichen Eigenschaften.
- Ersetzt man die Matrizen durch ihre Spur, so erhält man den Charakter der Darstellung.

Charaktere

- Basiswechsel führt zu ähnlichen Matrizen und ähnlichen Darstellungen mit gleichen Eigenschaften.
- Ersetzt man die Matrizen durch ihre Spur, so erhält man den Charakter der Darstellung.
- Ähnliche Darstellungen haben den gleichen Charakter.

Charaktere

- Basiswechsel führt zu ähnlichen Matrizen und ähnlichen Darstellungen mit gleichen Eigenschaften.
- Ersetzt man die Matrizen durch ihre Spur, so erhält man den Charakter der Darstellung.
- Ähnliche Darstellungen haben den gleichen Charakter.

Beispiel (Dreieck)

$$\text{Drehung um } 120^\circ \longrightarrow -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow -1$$

Charaktere

- Basiswechsel führt zu ähnlichen Matrizen und ähnlichen Darstellungen mit gleichen Eigenschaften.
- Ersetzt man die Matrizen durch ihre Spur, so erhält man den Charakter der Darstellung.
- Ähnliche Darstellungen haben den gleichen Charakter.

Beispiel (Dreieck)

$$\text{Drehung um } 120^\circ \longrightarrow -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow -1$$

$$\text{Spiegelung an y-Achse} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

Blöcke

- Beliebige Charaktere lassen sich als Summe irreduzibler Charaktere schreiben.

Blöcke

- Beliebige Charaktere lassen sich als Summe irreduzibler Charaktere schreiben.
- Irreduzibel heißt dabei, dass die Größe der entsprechenden Matrizen (d. h. der Grad des Charakters) möglichst klein ist.

Blöcke

- Beliebige Charaktere lassen sich als Summe irreduzibler Charaktere schreiben.
- Irreduzibel heißt dabei, dass die Größe der entsprechenden Matrizen (d. h. der Grad des Charakters) möglichst klein ist.
- Für eine vorgegebene Primzahl p erfüllen die Werte mancher irreduzibler Charaktere gleiche Teilbarkeitskriterien bzgl. p.

Blöcke

- Beliebige Charaktere lassen sich als Summe irreduzibler Charaktere schreiben.
- Irreduzibel heißt dabei, dass die Größe der entsprechenden Matrizen (d. h. der Grad des Charakters) möglichst klein ist.
- Für eine vorgegebene Primzahl p erfüllen die Werte mancher irreduzibler Charaktere gleiche Teilbarkeitskriterien bzgl. p.
- Dementsprechend verteilt man die irreduziblen Charaktere einer endlichen Gruppe in Blöcke (genauer p-Blöcke).

Gewöhnliche Darstellungstheorie

- Ist die Anzahl der Gruppenelemente nicht durch p teilbar, so enthält jeder Block nur einen Charakter.

Gewöhnliche Darstellungstheorie

- Ist die Anzahl der Gruppenelemente nicht durch p teilbar, so enthält jeder Block nur einen Charakter.
- Diesen Fall versteht man sehr gut (gewöhnliche Darstellungstheorie).

Gewöhnliche Darstellungstheorie

- Ist die Anzahl der Gruppenelemente nicht durch p teilbar, so enthält jeder Block nur einen Charakter.
- Diesen Fall versteht man sehr gut (gewöhnliche Darstellungstheorie).

Beispiel (Dreieck)

Die Gruppe D_6 besitzt drei irreduzible Charaktere χ_1, χ_2 und χ_3 mit den Graden 1, 1 bzw. 2 (χ_3 haben wir bereits berechnet).

Gewöhnliche Darstellungstheorie

- Ist die Anzahl der Gruppenelemente nicht durch p teilbar, so enthält jeder Block nur einen Charakter.
- Diesen Fall versteht man sehr gut (gewöhnliche Darstellungstheorie).

Beispiel (Dreieck)

Die Gruppe D_6 besitzt drei irreduzible Charaktere χ_1, χ_2 und χ_3 mit den Graden 1, 1 bzw. 2 (χ_3 haben wir bereits berechnet).

Verteilung in p-Blöcke:

$p = 2$	$p = 3$	$p \geq 5$
$\boxed{\chi_1, \chi_2}$ $\boxed{\chi_3}$	$\boxed{\chi_1, \chi_2, \chi_3}$	$\boxed{\chi_1}$ $\boxed{\chi_2}$ $\boxed{\chi_3}$

Invarianten

- Jeder Block B von G besitzt eine Defektgruppe D.

Invarianten

- Jeder Block B von G besitzt eine Defektgruppe D.
- Dies ist eine p-Untergruppe von G, d. h. $|D| = p^d$ für ein $d \geq 0$.

Invarianten

- Jeder Block B von G besitzt eine Defektgruppe D.
- Dies ist eine p-Untergruppe von G, d. h. $|D| = p^d$ für ein $d \geq 0$.

Definition

$k(B) \quad := \quad$ Anzahl der irreduziblen Charaktere in B,

Invarianten

- Jeder Block B von G besitzt eine Defektgruppe D.
- Dies ist eine p-Untergruppe von G, d. h. $|D| = p^d$ für ein $d \geq 0$.

Definition

$k(B)$:= Anzahl der irreduziblen Charaktere in B,

$k_i(B)$:= Anzahl der irreduziblen Charaktere χ in B mit $\chi(1)_p = p^i|G:D|_p$. $\quad (i = 0, 1, \dots)$

Invarianten

- Jeder Block B von G besitzt eine Defektgruppe D.
- Dies ist eine p-Untergruppe von G, d. h. $|D| = p^d$ für ein $d \geq 0$.

Definition

$k(B)$:= Anzahl der irreduziblen Charaktere in B,

$k_i(B)$:= Anzahl der irreduziblen Charaktere χ in B mit $\chi(1)_p = p^i|G : D|_p$. $(i = 0, 1, \ldots)$

Es gilt dann $k(B) = k_0(B) + k_1(B) + \ldots$.

Brauer-Charaktere

- Betrachtet man die Matrizen einer Darstellung über Körpern der Charakteristik p, so entstehen Brauer-Charaktere.

Brauer-Charaktere

- Betrachtet man die Matrizen einer Darstellung über Körpern der Charakteristik p, so entstehen Brauer-Charaktere.
- Die irreduziblen Brauer-Charaktere verteilen sich ebenfalls auf die p-Blöcke von G.

Brauer-Charaktere

- Betrachtet man die Matrizen einer Darstellung über Körpern der Charakteristik p, so entstehen Brauer-Charaktere.
- Die irreduziblen Brauer-Charaktere verteilen sich ebenfalls auf die p-Blöcke von G.
- Man definiert

$$l(B) := \text{ Anzahl der irreduziblen Brauer-Charaktere in } B.$$

Brauer-Charaktere

- Betrachtet man die Matrizen einer Darstellung über Körpern der Charakteristik p, so entstehen Brauer-Charaktere.
- Die irreduziblen Brauer-Charaktere verteilen sich ebenfalls auf die p-Blöcke von G.
- Man definiert

$$l(B) := \text{ Anzahl der irreduziblen Brauer-Charaktere in } B.$$

Beispiel (Dreieck)

Sei B der (einzige) 3-Block von D_6. Dann ist D die Gruppe der drei Rotationen, $k(B) = k_0(B) = 3$ und $l(B) = 2$.

Problemstellung

Gegeben: Primzahl p, Defektgruppe D (lokale Information).

Problemstellung

Gegeben: Primzahl p, Defektgruppe D (lokale Information).

Voraussetzung: B ist ein p-Block einer beliebigen endlichen Gruppe G mit Defektgruppe D.

Problemstellung

Gegeben: Primzahl p, Defektgruppe D (lokale Information).

Voraussetzung: B ist ein p-Block einer beliebigen endlichen Gruppe G mit Defektgruppe D.

Gesucht: $k(B)$, $k_i(B)$, $l(B)$, $\ldots$ (globale Information).

Motivation

Offene Vermutungen:

Motivation

Offene Vermutungen:

- Brauer 1954: $k(B) \leq |D|$.

Motivation

Offene Vermutungen:

- Brauer 1954: $k(B) \le |D|$.
- Brauer 1956: $k(B) = k_0(B) \iff D$ abelsch.

Motivation

Offene Vermutungen:

- Brauer 1954: $k(B) \le |D|$.
- Brauer 1956: $k(B) = k_0(B) \iff D$ abelsch.
- Olsson 1975: $k_0(B) \le |D : D'|$.

Motivation

Offene Vermutungen:

- Brauer 1954: $k(B) \le |D|$.
- Brauer 1956: $k(B) = k_0(B) \iff D$ abelsch.
- Olsson 1975: $k_0(B) \le |D : D'|$.
- Alperin-McKay 1975: $k_0(B) = k_0(b)$

Motivation

Offene Vermutungen:

- Brauer 1954: $k(B) \leq |D|$.
- Brauer 1956: $k(B) = k_0(B) \iff D$ abelsch.
- Olsson 1975: $k_0(B) \leq |D : D'|$.
- Alperin-McKay 1975: $k_0(B) = k_0(b)$
- Alperin 1986: $l(B) = \sum \ldots$

Motivation

Offene Vermutungen:

- Brauer 1954: $k(B) \le |D|$.
- Brauer 1956: $k(B) = k_0(B) \iff D$ abelsch.
- Olsson 1975: $k_0(B) \le |D : D'|$.
- Alperin-McKay 1975: $k_0(B) = k_0(b)$
- Alperin 1986: $l(B) = \sum \ldots$.
- Dade 1992: $k_i(B) = \sum_j (-1)^j \ldots$.

$\vdots$

Motivation

Offene Vermutungen:

- Brauer 1954: $k(B) \le |D|$.
- Brauer 1956: $k(B) = k_0(B) \iff D$ abelsch.
- Olsson 1975: $k_0(B) \le |D : D'|$.
- Alperin-McKay 1975: $k_0(B) = k_0(b)$
- Alperin 1986: $l(B) = \sum \ldots$.
- Dade 1992: $k_i(B) = \sum_j (-1)^j \ldots$.

  $\vdots$

- Gluck 2011: *kompliziert*.

Fusionssysteme

- Das Fusionssystem $\mathcal{F}$ von B ist eine Kategorie, die die Einbettung von D in G beschreibt.

Fusionssysteme

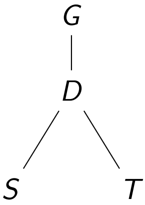
- Das Fusionssystem $\mathcal{F}$ von B ist eine Kategorie, die die Einbettung von D in G beschreibt.
- Die Klassifikation aller Fusionssysteme auf einer p-Gruppe D ist auch für die Topologie von Bedeutung.

Fusionssysteme

- Das Fusionssystem $\mathcal{F}$ von B ist eine Kategorie, die die Einbettung von D in G beschreibt.
- Die Klassifikation aller Fusionssysteme auf einer p-Gruppe D ist auch für die Topologie von Bedeutung.
- Alperins Fusionssatz: Man muss nur die Fusion von wenigen Untergruppen von D kennen.

Fusionssysteme

- Das Fusionssystem $\mathcal{F}$ von B ist eine Kategorie, die die Einbettung von D in G beschreibt.
- Die Klassifikation aller Fusionssysteme auf einer p-Gruppe D ist auch für die Topologie von Bedeutung.
- Alperins Fusionssatz: Man muss nur die Fusion von wenigen Untergruppen von D kennen.



Fusionssysteme

- Das Fusionssystem $\mathcal{F}$ von B ist eine Kategorie, die die Einbettung von D in G beschreibt.
- Die Klassifikation aller Fusionssysteme auf einer p-Gruppe D ist auch für die Topologie von Bedeutung.
- Alperins Fusionssatz: Man muss nur die Fusion von wenigen Untergruppen von D kennen.

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, dash] & \\
& D \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
S \arrow[rr, dashed, "g"'] & & T
\end{tikzcd}$$

Existiert ein $g \in G$ mit $gSg^{-1} = T$?

Fusionssysteme

- Das Fusionssystem $\mathcal{F}$ von B ist eine Kategorie, die die Einbettung von D in G beschreibt.
- Die Klassifikation aller Fusionssysteme auf einer p-Gruppe D ist auch für die Topologie von Bedeutung.
- Alperins Fusionssatz: Man muss nur die Fusion von wenigen Untergruppen von D kennen.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, dash] & \\ & D \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ S \arrow[rr, dashed, "g"'] & & T \end{tikzcd}$$

Existiert ein $g \in G$ mit $gSg^{-1} = T$?

Alperin: $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ mit $h_i \in H_i$,
$H_1, \ldots, H_n$ sind lokale Untergruppen von G

Zerlegungszahlen

- Beziehungen zwischen (gewöhnlichen) Charakteren und Brauer-Charakteren eines Blocks lassen sich durch Zerlegungszahlen ausdrücken, die man in einer Matrix Q anordnet.

Zerlegungszahlen

- Beziehungen zwischen (gewöhnlichen) Charakteren und Brauer-Charakteren eines Blocks lassen sich durch Zerlegungszahlen ausdrücken, die man in einer Matrix Q anordnet.
- Brauer, Broué und Murai bewiesen Teilbarkeitsrelationen für Zerlegungszahlen.

Zerlegungszahlen

- Beziehungen zwischen (gewöhnlichen) Charakteren und Brauer-Charakteren eines Blocks lassen sich durch Zerlegungszahlen ausdrücken, die man in einer Matrix Q anordnet.
- Brauer, Broué und Murai bewiesen Teilbarkeitsrelationen für Zerlegungszahlen.
- Oft kann man damit alle möglichen Zerlegungszahlen mittels Computereinsatz berechnen.

Zerlegungszahlen

- Beziehungen zwischen (gewöhnlichen) Charakteren und Brauer-Charakteren eines Blocks lassen sich durch Zerlegungszahlen ausdrücken, die man in einer Matrix Q anordnet.
- Brauer, Broué und Murai bewiesen Teilbarkeitsrelationen für Zerlegungszahlen.
- Oft kann man damit alle möglichen Zerlegungszahlen mittels Computereinsatz berechnen.
- Die Cartanmatrix $C = Q^{\mathsf{T}} Q \in \mathbb{Z}^{l(B) \times l(B)}$ von B is symmetrisch und positiv definit.

Zerlegungszahlen

- Beziehungen zwischen (gewöhnlichen) Charakteren und Brauer-Charakteren eines Blocks lassen sich durch Zerlegungszahlen ausdrücken, die man in einer Matrix Q anordnet.
- Brauer, Broué und Murai bewiesen Teilbarkeitsrelationen für Zerlegungszahlen.
- Oft kann man damit alle möglichen Zerlegungszahlen mittels Computereinsatz berechnen.
- Die Cartanmatrix $C = Q^{\mathrm{T}}Q \in \mathbb{Z}^{l(B)\times l(B)}$ von B is symmetrisch und positiv definit.
- Dies liefert eine quadratische Form $q(x) := xCx^{\mathrm{T}}$.

Beispiel

Beispiel (Dreieck)

- Die Drehungen σ_{120} und σ_{240} um 120° bzw. 240° sind in der Gruppe D_6 fusioniert. Denn ist τ eine Spiegelung, so ist $\tau\sigma_{120}\tau^{-1} = \sigma_{240}$.

Beispiel

Beispiel (Dreieck)

- Die Drehungen σ_{120} und σ_{240} um $120°$ bzw. $240°$ sind in der Gruppe D_6 fusioniert. Denn ist τ eine Spiegelung, so ist $\tau\sigma_{120}\tau^{-1} = \sigma_{240}$.
- Die Zerlegungsmatrix und die Cartanmatrix des 3-Blocks sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ungleichungen

Lokale Information bestimmt globale Information:

Ungleichungen

Lokale Information bestimmt globale Information:

Lemma

Sei $u \in D$ und b_u ein Brauer-Korrespondent von B in $C_G(u)$.

Ungleichungen

Lokale Information bestimmt globale Information:

Lemma

Sei $u \in D$ und b_u ein Brauer-Korrespondent von B in $C_G(u)$.

(i) *Hat b_u Cartanmatrix $C_u = (c_{ij})$, so ist*

$$k_0(B) \leq \sum_{i=1}^{l(b_u)} c_{ii} - \sum_{i=1}^{l(b_u)-1} c_{i,i+1}.$$

Ungleichungen

Lokale Information bestimmt globale Information:

Lemma

Sei $u \in D$ und b_u ein Brauer-Korrespondent von B in $C_G(u)$.

(i) *Hat b_u Cartanmatrix $C_u = (c_{ij})$, so ist*

$$k_0(B) \le \sum_{i=1}^{l(b_u)} c_{ii} - \sum_{i=1}^{l(b_u)-1} c_{i,i+1}.$$

(ii) *Ist $Q/\langle u\rangle$ zyklisch für eine Defektgruppe Q von b_u, so gilt*

$$k_0(B) \le \left(\frac{|Q/\langle u\rangle| - 1}{l(b_u)} + l(b_u)\right)|\langle u\rangle| \le |Q|.$$

Ungleichungen

Lemma

Sei $u \in \mathrm{Z}(D)$ und b_u ein Brauer-Korrespondent von B in $\mathrm{C}_G(u)$.

Ungleichungen

Lemma

Sei $u \in \mathrm{Z}(D)$ und b_u ein Brauer-Korrespondent von B in $\mathrm{C}_G(u)$.

(i) *Im Fall $l(b_u) \leq 2$ ist $k(B) \leq |D|$.*

Ungleichungen

Lemma

Sei $u \in \mathrm{Z}(D)$ *und* b_u *ein Brauer-Korrespondent von* B *in* $\mathrm{C}_G(u)$.

(i) *Im Fall* $l(b_u) \le 2$ *ist* $k(B) \le |D|$.

(ii) *Im Fall* $l(b_u) = 1$ *ist*

$$k(B) \le \sum_{i=0}^{\infty} p^{2i} k_i(B) \le \frac{|\langle u \rangle| + p^s(r^2-1)}{|\langle u \rangle| r} |D| \le |D|,$$

wobei $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(\langle u \rangle)| = p^s r$ *mit* $p \nmid r$ *und* $s \ge 0$.

Die Klassifikation

- Jede endliche Gruppe G setzt sich aus eindeutig bestimmten einfachen Gruppen zusammen (Ähnlich der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl).

Die Klassifikation

- Jede endliche Gruppe G setzt sich aus eindeutig bestimmten einfachen Gruppen zusammen (Ähnlich der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl).
- Es kann jedoch verschiedene Gruppen geben, die aus den gleichen Bausteinen bestehen.

Die Klassifikation

- Jede endliche Gruppe G setzt sich aus eindeutig bestimmten einfachen Gruppen zusammen (Ähnlich der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl).
- Es kann jedoch verschiedene Gruppen geben, die aus den gleichen Bausteinen bestehen.

Satz („Die“ Klassifikation)

Jede endliche einfache Gruppe gehört zu einer von drei unendlichen Serien oder ist eine von 26 Ausnahmegruppen.

Die Klassifikation

- Jede endliche Gruppe G setzt sich aus eindeutig bestimmten einfachen Gruppen zusammen (Ähnlich der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl).
- Es kann jedoch verschiedene Gruppen geben, die aus den gleichen Bausteinen bestehen.

Satz („Die" Klassifikation)

Jede endliche einfache Gruppe gehört zu einer von drei unendlichen Serien oder ist eine von 26 Ausnahmegruppen.

Beweis.

Die Klassifikation

- Jede endliche Gruppe G setzt sich aus eindeutig bestimmten einfachen Gruppen zusammen (Ähnlich der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl).
- Es kann jedoch verschiedene Gruppen geben, die aus den gleichen Bausteinen bestehen.

Satz („Die" Klassifikation)

Jede endliche einfache Gruppe gehört zu einer von drei unendlichen Serien oder ist eine von 26 Ausnahmegruppen.

Beweis.

...hat über 10.000 Seiten! $\square$

Auflösbare Gruppen

Sind alle einfachen Bausteine abelsch, so ist G auflösbar und die Vermutung der Blocktheorie sind erfüllt.

Auflösbare Gruppen

Sind alle einfachen Bausteine abelsch, so ist G auflösbar und die Vermutung der Blocktheorie sind erfüllt.

Beispiel (Dreieck)

Die Gruppe D_6 hat die Form $C_3 \rtimes C_2$. Der Baustein C_3 besteht aus den drei Rotationen des Dreiecks. Die Gruppe ist daher auflösbar.

Reduktion

Im nicht-auflösbaren Fall kann man mittels Fong-Reduktion oft erreichen, dass G nur **einen** nicht-abelschen Baustein hat:

Reduktion

Im nicht-auflösbaren Fall kann man mittels Fong-Reduktion oft erreichen, dass G nur **einen** nicht-abelschen Baustein hat:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash] \\
\mathrm{E}(G)
\end{tikzcd}$$

Reduktion

Im nicht-auflösbaren Fall kann man mittels Fong-Reduktion oft erreichen, dass G nur **einen** nicht-abelschen Baustein hat:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\ \mathrm{F}(G) = \mathrm{Z}(G) & \\ & \mathrm{E}(G) \end{tikzcd}$$

Reduktion

Im nicht-auflösbaren Fall kann man mittels Fong-Reduktion oft erreichen, dass G nur **einen** nicht-abelschen Baustein hat:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & G \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathrm{F}(G) = \mathrm{Z}(G) \arrow[ddr] & \\
 & \mathrm{E}(G) \arrow[d] \\
 & \mathrm{Z}(\mathrm{E}(G)) \arrow[d] \\
 & 1
\end{tikzcd}$$

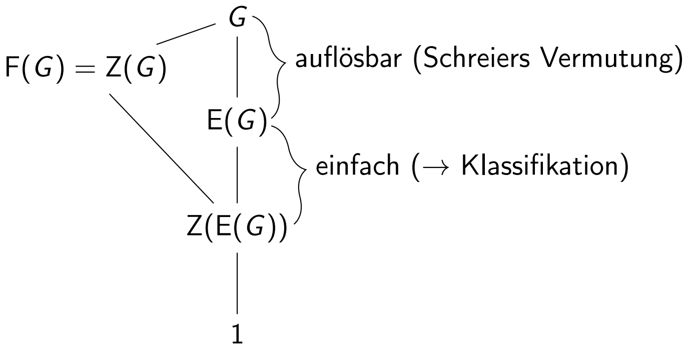
Reduktion

Im nicht-auflösbaren Fall kann man mittels Fong-Reduktion oft erreichen, dass G nur **einen** nicht-abelschen Baustein hat:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & G \arrow[d] & \\
\mathrm{F}(G) = \mathrm{Z}(G) \arrow[ur] \arrow[ddr] & & \left.\right\}\ \text{auflösbar (Schreiers Vermutung)} \\
 & \mathrm{E}(G) \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Z}(\mathrm{E}(G)) \arrow[d] & \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

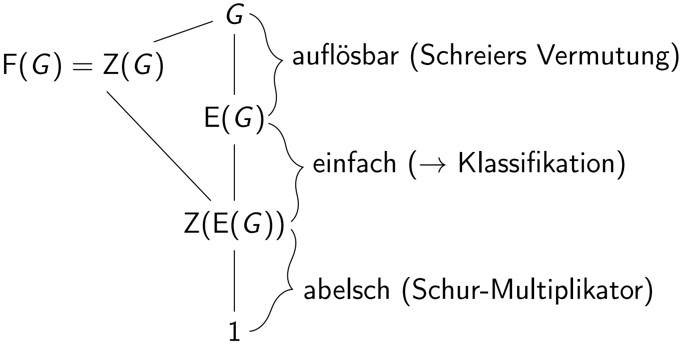
Reduktion

Im nicht-auflösbaren Fall kann man mittels Fong-Reduktion oft erreichen, dass G nur **einen** nicht-abelschen Baustein hat:



Reduktion

Im nicht-auflösbaren Fall kann man mittels Fong-Reduktion oft erreichen, dass G nur **einen** nicht-abelschen Baustein hat:



Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

- D zyklisch (Brauer 1941, Dade 1966).

Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

- D zyklisch (Brauer 1941, Dade 1966).
- B zahm (Brauer 1974, Olsson 1975, Erdmann 1990).

Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

- D zyklisch (Brauer 1941, Dade 1966).
- B zahm (Brauer 1974, Olsson 1975, Erdmann 1990).
- $\mathcal{F}$ trivial (Puig 1988).

Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

- D zyklisch (Brauer 1941, Dade 1966).
- B zahm (Brauer 1974, Olsson 1975, Erdmann 1990).
- $\mathcal{F}$ trivial (Puig 1988).
- D abelsch und $\mathcal{F}$ „klein“ (Puig-Usami 1990er)

Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

- D zyklisch (Brauer 1941, Dade 1966).
- B zahm (Brauer 1974, Olsson 1975, Erdmann 1990).
- $\mathcal{F}$ trivial (Puig 1988).
- D abelsch und $\mathcal{F}$ „klein“ (Puig-Usami 1990er)
- $D \cong C_4 \wr C_2$ (Külshammer 1980).

Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

- D zyklisch (Brauer 1941, Dade 1966).
- B zahm (Brauer 1974, Olsson 1975, Erdmann 1990).
- $\mathcal{F}$ trivial (Puig 1988).
- D abelsch und $\mathcal{F}$ „klein“ (Puig-Usami 1990er)
- $D \cong C_4 \wr C_2$ (Külshammer 1980).
- $D \cong C_3 \times C_3$ mit Einschränkungen an $\mathcal{F}$ (Kiyota 1984, Watanabe 2010).

Bekannte Ergebnisse

In folgenden Fällen kennt man die Blockinvarianten:

- D zyklisch (Brauer 1941, Dade 1966).
- B zahm (Brauer 1974, Olsson 1975, Erdmann 1990).
- $\mathcal{F}$ trivial (Puig 1988).
- D abelsch und $\mathcal{F}$ „klein" (Puig-Usami 1990er)
- $D \cong C_4 \wr C_2$ (Külshammer 1980).
- $D \cong C_3 \times C_3$ mit Einschränkungen an $\mathcal{F}$ (Kiyota 1984, Watanabe 2010).
- $D \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ (Kessar-Koshitani-Linckelmann 2012).

Invarianten

Satz

Sei $p = 2$. Die Blockinvarianten für B sind in folgenden Fällen bekannt:

Invarianten

Satz

Sei $p = 2$. Die Blockinvarianten für B sind in folgenden Fällen bekannt:

- *D metazyklisch,*

Invarianten

Satz

Sei $p = 2$. Die Blockinvarianten für B sind in folgenden Fällen bekannt:

- *D metazyklisch,*
- *D minimal nicht-abelsch,*

Invarianten

Satz

Sei $p = 2$. Die Blockinvarianten für B sind in folgenden Fällen bekannt:

- *D metazyklisch,*
- *D minimal nicht-abelsch,*
- $D \cong (\textit{maximale Klasse}) * (\textit{zyklisch})$,

Invarianten

Satz

Sei $p = 2$. Die Blockinvarianten für B sind in folgenden Fällen bekannt:

- *D metazyklisch,*
- *D minimal nicht-abelsch,*
- *$D \cong$ (maximale Klasse) $*$ (zyklisch),*
- *D bizyklisch für drei unendliche Familien,*

Invarianten

Satz

Sei $p = 2$. Die Blockinvarianten für B sind in folgenden Fällen bekannt:

- *D metazyklisch,*
- *D minimal nicht-abelsch,*
- *$D \cong$ (maximale Klasse) $*$ (zyklisch),*
- *D bizyklisch für drei unendliche Familien,*
- *$|D| \leq 16$.*

Invarianten

Satz

Sei $p = 2$. Die Blockinvarianten für B sind in folgenden Fällen bekannt:

- *D metazyklisch,*
- *D minimal nicht-abelsch,*
- *$D \cong$ (maximale Klasse) $*$ (zyklisch),*
- *D bizyklisch für drei unendliche Familien,*
- *$|D| \leq 16$.*

In diesen Fällen sind die wichtigsten Vermutungen erfüllt.

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \le |D|$) gilt in folgenden Fällen:

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \le |D|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D metazyklisch,*

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \le |D|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D metazyklisch,*
- *D abelsch und $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(D)| \le 255$,*

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \le |D|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D metazyklisch,*
- *D abelsch und $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(D)| \le 255$,*
- *$p = 2$ und $|D| \le 32$,*

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \le |D|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D metazyklisch,*
- *D abelsch und $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(D)| \le 255$,*
- *$p = 2$ und $|D| \le 32$,*
- *$p = 3$ und $|D| \le 27$,*

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \leq |D|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D metazyklisch,*
- *D abelsch und $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(D)| \leq 255$,*
- *$p = 2$ und $|D| \leq 32$,*
- *$p = 3$ und $|D| \leq 27$,*
- *$p = 2$ und D abelsch vom Rang ≤ 5,*

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \le |D|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D metazyklisch,*
- *D abelsch und $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(D)| \le 255$,*
- *$p = 2$ und $|D| \le 32$,*
- *$p = 3$ und $|D| \le 27$,*
- *$p = 2$ und D abelsch vom Rang ≤ 5,*
- *$p \in \{3, 5\}$ und D abelsch vom Rang ≤ 3,*

Brauers $k(B)$-Vermutung

Satz

Brauers $k(B)$-Vermutung ($k(B) \le |D|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D metazyklisch,*
- *D abelsch und $|\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(D)| \le 255$,*
- *$p = 2$ und $|D| \le 32$,*
- *$p = 3$ und $|D| \le 27$,*
- *$p = 2$ und D abelsch vom Rang ≤ 5,*
- *$p \in \{3, 5\}$ und D abelsch vom Rang ≤ 3,*
- *$p = 2$ und $|D : \langle x \rangle| \le 4$ für ein $x \in D$.*

Olssons Vermutung

Satz

Olssons Vermutung ($k_0(B) \le |D : D'|$) *gilt in folgenden Fällen:*

Olssons Vermutung

Satz

Olssons Vermutung ($k_0(B) \le |D : D'|$) gilt in folgenden Fällen:

- *D bizyklisch,*

Olssons Vermutung

Satz

Olssons Vermutung ($k_0(B) \le |D : D'|$) *gilt in folgenden Fällen:*

- *D bizyklisch,*
- *D minimal nicht-abelsch (bis auf 3_+^{1+2}),*

Olssons Vermutung

Satz

Olssons Vermutung ($k_0(B) \le |D : D'|$) *gilt in folgenden Fällen:*

- *D bizyklisch,*
- *D minimal nicht-abelsch (bis auf 3_+^{1+2}),*
- *$p = 2$ und $|D| \le 32$,*

Olssons Vermutung

Satz

Olssons Vermutung ($k_0(B) \le |D : D'|$) *gilt in folgenden Fällen:*

- D *bizyklisch,*
- D *minimal nicht-abelsch* (*bis auf* 3_+^{1+2}),
- $p = 2$ *und* $|D| \le 32$,
- $p = 5$ *und* $|D| \le 125$,

Olssons Vermutung

Satz

Olssons Vermutung ($k_0(B) \le |D : D'|$) *gilt in folgenden Fällen:*

- D *bizyklisch,*
- D *minimal nicht-abelsch (bis auf* 3_+^{1+2}),
- $p = 2$ *und* $|D| \le 32$,
- $p = 5$ *und* $|D| \le 125$,
- $p > 3$ *und* D *hat* p*-Rang* 2.

Donovans Vermutung

Manchmal kann man mehr über Charaktere und Darstellungen herausfinden als nur deren Anzahlen:

Donovans Vermutung

Manchmal kann man mehr über Charaktere und Darstellungen herausfinden als nur deren Anzahlen:

Satz (Eaton-Kessar-Külshammer-S. 2013)

Sei $p = 2$ und D abelsch vom Rang höchstens 2. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

Donovans Vermutung

Manchmal kann man mehr über Charaktere und Darstellungen herausfinden als nur deren Anzahlen:

Satz (Eaton-Kessar-Külshammer-S. 2013)

Sei $p = 2$ und D abelsch vom Rang höchstens 2. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- *B ist nilpotent.*

Donovans Vermutung

Manchmal kann man mehr über Charaktere und Darstellungen herausfinden als nur deren Anzahlen:

Satz (Eaton-Kessar-Külshammer-S. 2013)

Sei $p = 2$ und D abelsch vom Rang höchstens 2. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- *B ist nilpotent.*
- *B ist Morita-äquivalent zur Gruppenalgebra von $D \rtimes C_3$.*

Donovans Vermutung

Manchmal kann man mehr über Charaktere und Darstellungen herausfinden als nur deren Anzahlen:

Satz (Eaton-Kessar-Külshammer-S. 2013)

Sei $p = 2$ und D abelsch vom Rang höchstens 2. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- *B ist nilpotent.*
- *B ist Morita-äquivalent zur Gruppenalgebra von $D \rtimes C_3$.*
- *$D \cong C_2 \times C_2$ und B is Morita-äquivalent zum Hauptblock von A_5.*

Donovans Vermutung

Manchmal kann man mehr über Charaktere und Darstellungen herausfinden als nur deren Anzahlen:

Satz (Eaton-Kessar-Külshammer-S. 2013)

Sei $p = 2$ und D abelsch vom Rang höchstens 2. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- *B ist nilpotent.*
- *B ist Morita-äquivalent zur Gruppenalgebra von $D \rtimes C_3$.*
- *$D \cong C_2 \times C_2$ und B is Morita-äquivalent zum Hauptblock von A_5.*

Insbesondere gelten die Vermutungen von Donovan und Broué für B.

Die Brauer-Feit-Schranke

Satz (Brauer-Feit)

Für einen Block B mit Defektgruppe D gilt

$$k(B) \leq |D|^2.$$

Die Brauer-Feit-Schranke

Satz (Brauer-Feit)

Für einen Block B mit Defektgruppe D gilt

$$k(B) \leq |D|^2.$$

Satz (S. 2013)

Für einen Block B mit abelscher Defektgruppe D gilt

$$k(B) \leq |D|^{\frac{3}{2}}.$$